بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه‌های معین

نگارش

محمّدرضا پورنکی

استاد راهنما

دکتر محمّدرضا درفشه

رسالهٔ برای دریافت درجهٔ دکتری تخصصی در رشتهٔ ریاضیات محض

(شاخهٔ نظریهٔ گروه‌های متناهی)

از گروه ریاضی و علوم کامپیوترِ دانشکدهٔ علوم

اسفند ماه ۱۳۷۸

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که هرچه دارم از آنهاست

سپاسگزاری

نگارنده بسیاری از معلومات خود را در شاخهٔ نظریهٔ گروه‌های متناهی مدیون استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمّدرضا درفشه است که به این وسیله مراتب سپاس و تشکر خود را به جهت زحمات و همفکریهای ایشان، بالاخص در تدوین این رساله، بیان می‌دارد. از اساتید محترم آقایان دکتر محمّدعلی شهابی شجاعی، دکتر علیرضا جمالی، دکتر علیرضا ذکائی، دکتر محمّد گودرزی و دکتر رحیم زارع‌نهندی نیز که قبول زحمت فرمودند و در کمیتهٔ دفاع از این رساله شرکت داشتند و از راهنماییهای ایشان بهره جسته‌ام نهایت قدردانی را می‌نمایم.

همچنین از مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات که کارهای تحقیقاتی مربوط به این رساله را با حمایتهای مالی آن مرکز، به‌عنوان محقق هستهٔ نظریهٔ گروه‌ها، انجام داده‌ام تشکر می‌کنم.

محمّدرضا پورنکی

اسفند ماه ۱۳۷۸

پیشگفتار

ایسایی شور در رسالهٔ دکتری خود مطالعاتی در مورد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های خطی عام انجام داده است. شاید بتوان گفت در اینجا بوده است که برای اوّلین بار تصویری مقدماتی از کلاس تقارن تانسوری ظاهر شده است. در واقع کلاس تقارن تانسوری تعمیمی از فضای گراسمان می‌باشد که در اواخر قرن نوزدهم کاملاً شناخته شده بود و لذا می‌توان گفت مطالعهٔ روی کلاس تقارن تانسوری سابقه‌ای حدود یک قرن دارد، امّا در سالهای اخیر مطالعه روی آنها یکی از پر جاذبه‌ترین موضوع‌های جبر چندخطی بوده است و ریاضیدانان زیادی روی ردهٔ وسیعی از مسایل که با کلاس تقارن تانسوری ارتباط دارند کار کرده‌اند. ما نیز در این رساله کارهایی تحقیقاتی روی کلاس تقارن تانسوری انجام داده‌ایم. این رساله از پنج فصل تشکیل شده است. در فصل صفر به یادآوری مطالبی سنتی از نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی و جبر چندخطی پرداخته‌ایم، که در واقع چارچوب اصلی رساله بر روی آنها استوار است. در فصل اوّل کلاس تقارن تانسوری را معرفی کرده‌ایم تا بتوانیم کارهای تحقیقاتی خود را بیان کنیم. در فصول دوم، سوم و چهارم که به بعد کلاس تقارن تانسوری، غیربدیهی بودن و یا نبودن کلاس تقارن تانسوری و وجود یا عدم وجود پایه‌ای خاص برای کلاس تقارن تانسوری اختصاص داده‌ایم، کارهای تحقیقاتی که به‌دست آورده‌ایم را نوشته‌ایم. در این میان برای به‌دست آوردن بعضی از این کارهای تحقیقاتی، مجبور شده‌ایم به کارهای تحقیقاتی دیگران نیز اشاره کنیم. در زیر چکیده‌ای می‌آوریم که هدف این رساله را مشخص می‌کند.

فرض کنیم V فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$، G زیرگروهی از گروه متقارن S_n و χ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G باشد. تابع n خطی $\phi : \overset{n}{\times} V \to U$ را که U یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ فرض می‌شود، متقارن نسبت به G و χ می‌نامیم هرگاه برای هر v_1، $\ldots$، v_n از V

$$\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \phi(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}) = \phi(v_1, \ldots, v_n).$$

حال اگر S را یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ فرض کنیم، آنرا یک کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ می‌نامیم هرگاه تابع n خطی $\phi : \overset{n}{\times} V \to S$ که متقارن نسبت به G و χ می‌باشد موجود باشد طوری که:

۱) $\langle Im\ \phi \rangle = S$،

۲) برای هر $\mathbb{C}$ فضای برداری متناهی بعد U و هر تابع n خطی $\psi : \overset{n}{\times} V \to U$ که نسبت به G و χ متقارن است، تبدیل خطی منحصر به فرد $f : S \to U$ موجود باشد که نمودار زیر را جابه‌جایی کند، یعنی $f\phi = \psi$.

$$
\begin{array}{ccc}
\overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\phi} & S \\
\psi \downarrow & \swarrow f & \\
U & &
\end{array}
$$

ثابت می‌شود که کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ موجود و در حد یکریختی فضاهای برداری منحصر به‌فرد است و لذا مجازیم آنرا با $V_\chi^n(G)$ نمایش دهیم. مسایل تحقیقاتی بسیاری در مورد کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ، $V_\chi^n(G)$، مطرح است. یافتن فرمول صریح بعد $V_\chi^n(G)$، اینکه $V_\chi^n(G)$ به‌ازای کدام Gها وکدام χها غیرصفر است و وجود یا عدم وجود پایهٔ متعامد خاصی برای $V_\chi^n(G)$ معروف به Oـپایه وقتی که V فضای ضرب داخلی فرض می‌شود مسایل تحقیقاتی حل نشده‌ای هستند که عمری حدود ۴۰ سال دارند. محققین بسیاری برای گروه‌های معین داده شده‌ای مسایل حل نشدهٔ بالا را حل کرده‌اند و همانطوری که از عنوان این رساله نیز مشخص است، هدف این بوده است که در این رساله برای گروه‌های معین داده شده‌ای، به سؤالات بالا پاسخ بدهیم. گروه‌های معین $G = \langle \pi_1 \ldots \pi_p \rangle \leq \$_n$ که در آن π_i دوری به‌طول n_i در $\$_n$ می‌باشد و π_iها مجزا هستند، $G = T_{4n} \leq \$_{4n}$، $G = PSL_2(q) \leq \$_{q+1}$ و G به‌عنوان گروهی n عضوی و دلخواه که با نمایش کیلی زیرگروهی از $\$_n$ است، گروه‌هایی هستند که در این رساله در مورد کلاس تقارن تانسوری وابسته به آنها به سؤالات بالا پاسخ داده‌ایم. از این رساله چهار مقاله استخراج کرده‌ایم که برای چاپ در مجلات بین‌المللی پذیرفته شده است و این مقالات را در فهرست مراجع این رساله نیز آورده‌ایم (نگاه کنید به [4]، [5]، [6] و [7]).

محمّدرضا پورنکی

اسفندماه ۱۳۷۸

فهرست مطالب

فصل صفر

یادآوری پیشنیازهای سنتی

در این فصل به یادآوری مفاهیمی خواهیم پرداخت که نقش ابزارکار را در مطالعهٔ کلاس تقارن تانسوری دارند. با توجه به اینکه این مطالب سنتی می‌باشند و می‌توان آنها را در کتابهای درسی یافت، لذا از آوردن اثبات قضایا خودداری کرده‌ایم. این فصل از دو بخش تشکیل شده است که در بخش ۱ مطالب سنتی مورد نیاز از نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی یادآوری خواهند شد و در بخش ۲ مطالب مربوط به جبر چندخطی. در فصل بعد نیز از ترکیب نظریهٔ مربوط به سرشت گروه‌های متناهی و نظریهٔ مربوط به جبر چندخطی، نظریهٔ مربوط به کلاس تقارن تانسوری را خواهیم ساخت و تا پایان، مطالب مربوط به این نظریه را بسط خواهیم داد.

۰-۱ نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی

تمام مطالب این بخش، سنتی هستند و در واقع قسمتی از درسی به‌نام نظریهٔ نمایش و سرشت گروه‌های متناهی که در دورهٔ دکتری تدریس می‌شود. لذا هدف از مطرح کردن این بخش، راحت‌تر مطالعه کردن فصول اوّل تا چهارم می‌باشد که ساختمان اصلی این رساله را تشکیل می‌دهند. در نتیجه در این بخش حکمی را ثابت نخواهیم کرد و خوانندهٔ علاقه‌مند را جهت مطالعهٔ عمیق‌تر مفاهیم این بخش و اثبات احکام آن به مراجع [8]، [11] و [17] ارجاع می‌دهیم.

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. $\mathbb{C}G$ را مجموعهٔ تمام حاصل جمع‌های صوری به شکل $\sum_{g\in G} a_g.g$، $a_g \in \mathbb{C}$، در نظر می‌گیریم. یعنی

$$\mathbb{C}G = \left\{ \sum_{g\in G} a_g.g \mid a_g \in \mathbb{C} \right\} .$$

جمع $+ : \mathbb{C}G \times \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ با تعریف

$$\sum_{g\in G} a_g.g + \sum_{g\in G} b_g.g = \sum_{g\in G}(a_g + b_g).g$$

و ضرب در اسکالر $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ با تعریف

$$\lambda \cdot \sum_{g\in G} a_g.g = \sum_{g\in G} \lambda a_g.g$$

$\mathbb{C}G$ را به یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ تبدیل می‌کند. به‌راحتی می‌توانیم نشان دهیم که G پایه‌ای برای این فضای برداری است و لذا $\dim \mathbb{C}G = |G|$. یعنی $\mathbb{C}G$ یک $\mathbb{C}$ فضای برداری متناهی بعد است. می‌توانیم ضرب $\circ : \mathbb{C}G \times \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ را با تعریف

$$(\sum_{g\in G} a_g.g)\circ(\sum_{g'\in G} b_{g'}.g') = \sum_{g,g'\in G} a_g b_{g'}.gg'$$

روی $\mathbb{C}G$ تعریف کنیم و $\mathbb{C}G$ را به یک $\mathbb{C}$ جبر تبدیل کنیم. این $\mathbb{C}$ جبر را گروه جبر می‌نامیم.

اکنون V را یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ از بعد m در نظر می‌گیریم. جمعی را که V به‌عنوان $\mathbb{C}$ فضای برداری به آن مجهز است به‌همراه یک ضرب از نوع ضرب در اسکالر، $\cdot : V \times \mathbb{C}G \to V$، V را به یک $\mathbb{C}G$ مدول تبدیل می‌کند. نکته جالب توجه این است که هر کدام از این $\mathbb{C}G$ مدول‌ها یک همریختی از G القاء می‌کند. برای روشن شدن مطلب فرض کنیم $GL(V, \mathbb{C})$ گروه خطی عام، یعنی گروه عملگرهای خطی وارونپذیر روی V باشد. اگر V یک $\mathbb{C}G$ مدول باشد، هدف این است که می‌خواهیم

$$\begin{cases} D : G \to GL(V, \mathbb{C}) \\ g \longmapsto D(g) \end{cases}$$

را طوری تعریف کنیم که به یک همریختی از G تبدیل شود. برای این منظور باید $D(g)$ تعریف شود، امّا $D(g) : V \to V$ یک عملگر خطی وارونپذیر است و تعریف ضابطهٔ $D(g)$، D را کاملاً مشخص خواهد کرد. برای $v \in V$ تعریف می‌کنیم

$$(v)D(g) = v.g$$

و به‌راحتی بررسی می‌شود که اکنون D یک همریختی از G است. سؤالی طبیعی این است که بپرسیم آیا برعکس این کار نیز میسّر است یا نه. یعنی اینکه اگر همریختی $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$ داده شده باشد آیا می‌توانیم به کمک آن V را به یک $\mathbb{C}G$ مدول تبدل کنیم یا نه. در واقع جواب این سؤال نیز مثبت است، یعنی برای همریختی دادهٔ شدهٔ $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$، V با جمعی که به‌عنوان $\mathbb{C}$ فضای برداری به آن مجهز است و ضرب در اسکالر $\cdot : V \times \mathbb{C}G \to V$ با تعریف

$$v.g = (v)D(g)$$

به یک $\mathbb{C}G$ مدول تبدیل می‌شود. توجه می‌کنیم ضرب در اسکالر را فقط برای اعضای پایه‌ای $\mathbb{C}G$ که همان اعضای G هستند، تعریف کرده‌ایم.

با توجه به آنچه گفتیم، در می‌یابیم که ارتباطی نزدیک بین رده‌ای از $\mathbb{C}G$ مدول‌ها و رده‌ای از همریختی‌های G موجود است. این ردهٔ خاص از همریختی‌های G بسیار با اهمیت هستند و شایستهٔ داشتن نامی. تعریف زیر این نامگذاری را رسمی می‌کند.

تعریف ۱.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. به هر همریختی $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$ یک نمایش از گروه G با فضای نمایشی V و یا به اختصار یک نمایش از گروه G می‌گوییم. بعد V، یعنی m را نیز درجهٔ نمایش می‌نامیم.

تذکر ۲.۱.۰ با توجه به آنچه قبل از تعریف ۱.۱.۰ اشاره کردیم، هر نمایش ازگروه G با فضای نمایشی V، V را به یک $\mathbb{C}G$ مدول تبدیل می‌کند و برعکس اگر V یک $\mathbb{C}G$ مدول باشد، یک نمایش از گروه G با فضای نمایشی V به‌دست می‌آید.

تعریف ۳.۱.۰ فرض کنیم $D_1 : G \to GL(V_1, \mathbb{C})$ و $D_2 : G \to GL(V_2, \mathbb{C})$ دو نمایش از گروه G باشند. D_1 و D_2 را دو نمایش هم‌ارز می‌نامیم هرگاه D_1 و D_2، V_1 و V_2 را به دو $\mathbb{C}G$ مدول یکریخت تبدیل کنند. در غیر این صورت D_1 و D_2 را دو نمایش غیر هم‌ارز می‌نامیم.

با توجه به اینکه هر همریختی ازگروه G دارای هسته می‌باشد، لذا نمایش‌های گروه G نیز دارای هسته هستند. یعنی برای نمایش $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$ ازگروه G هستهٔ D، $Ker\ D$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود که در آن I عملگر خطی وارونپذیر همانی است.

$$Ker\ D = \{g \in G \mid D(g) = I\}.$$

تعریف ۴.۱.۰ نمایش $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$ ازگروه متناهی G را وفادار می‌نامیم هرگاه $Ker\ D = \{1\}$.

اعداد اوّل در مطالعهٔ اعداد صحیح نقش ویژه‌ای را دارند و در واقع بلوکهای ساختمانی اعداد صحیح را تشکیل می‌دهند. در مطالعهٔ $\mathbb{C}G$ مدول‌ها نیز رده‌ای ویژه از آنها موجودند که نقش اعداد اوّل را بازی می‌کنند و آنها $\mathbb{C}G$ مدول‌های تحویل‌ناپذیر هستند، یعنی $\mathbb{C}G$ مدول‌هایی که $\mathbb{C}G$ زیرمدول واقعی ندارند. واضح است که این فکر به‌سر آید که نمایش‌هایی ازگروه G که از این نوع $\mathbb{C}G$ مدول‌ها به‌دست می‌آیند اهمیت داشته باشند و شایستهٔ داشتن نامی. تعریف زیر این نامگذاری را رسمی می‌کند.

تعریف ۵.۱.۰ نمایش $D: G \to GL(V, \mathbb{C})$ از گروه متناهی G را نمایش تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه D، فضای V را به یک $\mathbb{C}G$ مدول تحویل‌ناپذیر تبدیل کند.

مثال ۶.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. V را یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $D: G \to GL(V, \mathbb{C})$ با تعریف $D(g) = I$، که در آن I عملگر خطی وارونپذیر همانی می‌باشد، یک نمایش گروه G است معروف به نمایش بدیهی G. اگر بعد فضای V برابر یک فرض شود، یعنی $m = ۱$، آنگاه D یک نمایش تحویل‌ناپذیر گروه G خواهد بود معروف به نمایش اصلی G.

مثال ۷.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و Ω یک مجموعهٔ m عضوی. گیریم G روی Ω عمل می‌کند. V را یک فضای برداری m بعدی با پایهٔ $\{e_w | w \in \Omega\}$ در نظر می‌گیریم. با تعریف

$$e_w . g = e_{g^{-1}.w}$$

V به یک $\mathbb{C}G$ مدول تبدیل می‌شود و لذا نمایش $D: G \to GL(V, \mathbb{C})$ به‌دست می‌آید. این نمایش را نمایش جایگشتی G می‌نامیم.

قضیهٔ ۸.۱.۰ (قضیهٔ مشکه). فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و V یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$. در این صورت V به‌عنوان $\mathbb{C}G$ مدول حاصل جمع مستقیمی از $\mathbb{C}G$ مدول‌های تحویل‌ناپذیر است.

توجه می‌کنیم که قضیهٔ مشکه اهمیت مطالعهٔ نمایش‌های تحویل‌ناپذیر گروه G را مشخص می‌کند. در واقع با توجه به این قضیه هر نمایش گروه G را می‌توان برحسب نمایش‌های تحویل‌ناپذیر آن گروه بیان کرد و لذا مطالعهٔ نمایش‌های تحویل‌ناپذیر G کافی خواهد بود.

اکنون به هر نمایش گروه G، تابعی نظیر می‌کنیم که به سرشتی از گروه G معروف است. مطالعهٔ سرشتهای گروه متناهی G، نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی را به‌وجود می‌آورد که یکی از پر جاذبه‌ترین شاخه‌های گروه‌های متناهی است. پیشرفت این نظریه تا حدی بوده است که اکنون این نظریه ابزاری برای حمله به مسایل مجرد در نظریهٔ گروه‌های متناهی شده است.

تعریف ۹.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $D: G \to GL(V, \mathbb{C})$ یک نمایش از گروه G. تابع $\chi: G \to \mathbb{C}$ با تعریف $\chi(g) = tr\ D(g)$ را سرشتی از گروه متناهی G می‌نامیم که در آن منظور از $tr\ D(g)$، اثر عملگر خطی وارونپذیر $D(g)$ است.

تذکر ۱۰.۱.۰ گیریم G یک گروه متناهی باشد و $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$ نمایشی از گروه G از درجهٔ m. در این صورت $\chi(1) = tr\ D(1) = tr\ I = m$، که در آن ۱ عضو خنثی برای G است. لذا $\chi(1)$ برابر است با درجهٔ نمایشی که χ به آن نظیر شده است.

تعریف ۱۱.۱.۰ فرض کنیم G گروهی متناهی باشد و $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی از آن. χ را سرشت خطی می‌نامیم اگر $\chi(1) = 1$.

تعریف ۱۲.۱.۰ فرض کنیم G گروهی متناهی باشد و $\chi_1 : G \to \mathbb{C}$ و $\chi_2 : G \to \mathbb{C}$ دو سرشت از آن. χ_1 و χ_2 را دو سرشت هم‌ارز می‌نامیم هرگاه نمایش‌هایی که χ_1 و χ_2 را پدید می‌آورند، دو نمایش هم‌ارز باشند. در غیر این صورت χ_1 و χ_2 را دو سرشت غیر هم‌ارز می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک سرشت از G. در این صورت هستهٔ χ که آنرا با $Ker\ \chi$ نمایش می‌دهیم را هستهٔ نمایشی تعریف می‌کنیم که χ را پدید می‌آورد. اگر $Ker\ \chi = \{1\}$، χ را سرشت وفادار می‌نامیم.

قضیهٔ ۱۴.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی از G. در این صورت $Ker\ \chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$.

تعریف ۱۵.۱.۰ فرض کنیم G گروهی متناهی باشد و $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی از آن. χ را سرشت تحویل‌ناپذیر G می‌نامیم هرگاه نمایشی که χ به آن نظیر شده است تحویل‌ناپذیر باشد. مجموعهٔ تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر G را با $I(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۶.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. V را یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. سرشتی که از نمایش تعریف شده در مثال ۶.۱.۰ به‌دست می‌آید عبارت است از $\chi : G \to \mathbb{C}$ با تعریف $\chi(g) = m$. این سرشت را سرشت بدیهی G می‌نامیم. در حالت $m = 1$، $\chi : G \to \mathbb{C}$ با تعریف $\chi(g) = 1$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G است معروف به سرشت اصلی G و معمولاً آنرا به‌جای χ با 1_G نمایش می‌دهند.

مثال ۱۷.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و Ω یک مجموعهٔ m عضوی. گیریم G روی Ω عمل کند و D را نمایشی از G در نظر می‌گیریم که در مثال ۷.۱.۰ معرفی کردیم. سرشتی که این نمایش پدید می‌آورد عبارت است از

$\chi : G \to \mathbb{C}$ با تعریف $\chi(g) = |\mathrm{fix}(g)|$ که در آن $|\mathrm{fix}(g)|$ تعداد اعضایی از Ω است که تحت g ثابت است. این سرشت را سرشت جایگشتی G می‌نامیم.

تذکر ۱۸.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. بنابر قضیهٔ مشکه، هر سرشتی از گروه G برابر است با مجموعی از سرشتهای تحویل‌ناپذیر G. با احتساب تکرار سرشتهای تحویل‌ناپذیر موجود در تجزیهٔ سرشت χ، می‌توانیم بنویسیم $\chi = n_1\chi_1 + \cdots + n_s\chi_s$ که در آن $n_1, \ldots, n_s$ اعداد صحیح مثبت هستند و $\chi_1, \ldots, \chi_s$ اعضایی از $I(G)$.

تذکر ۱۹.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. اگر G آبلی باشد، آنگاه G به تعداد اعضایش دارای سرشت تحویل‌ناپذیر است، یعنی $|I(G)| = |G|$. بالاخص اگر $G = \langle a \rangle$ دوری و از مرتبهٔ n باشد، در این صورت G دارای n سرشت تحویل‌ناپذیر است: $\chi_j : G \to \mathbb{C}$ با تعریف $\chi_j(a^k) = \exp(\frac{2\pi ijk}{n})$ که در آن $0 \leq j \leq n-1$ و $i^2 = -1$.

اکنون می‌خواهیم سرشتهای گروه‌های خارج قسمتی را بررسی کنیم. قضیهٔ زیر وضعیت سرشتهای تحویل‌ناپذیر این گروه‌ها را مشخص می‌کند.

قضیهٔ ۲۰.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و N زیرگروهی نرمال از G. اگر $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی از G باشد با این خاصیت که $N \subseteq Ker\ \chi$، در این صورت تابع $\tilde{\chi} : G/N \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\tilde{\chi}(Ng) = \chi(g)$ سرشتی از G/N است. برعکس، اگر $\tilde{\chi} : G/N \to \mathbb{C}$ سرشتی از G/N باشد، آنگاه تابع $\chi : G \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\chi(g) = \tilde{\chi}(Ng)$ سرشتی از G است با این خاصیت که $N \subseteq Ker\ \chi$. بالاخص χ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $\tilde{\chi}$ تحویل‌ناپذیر باشد.

نتیجهٔ ۲۱.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و N زیرگروهی نرمال از G. در این صورت

$$I(G/N) = \{\tilde{\chi} \mid \chi \in I(G),\ \ N \subseteq Ker\ \chi\}.$$

اکنون می‌خواهیم روابطی را که بین سرشتهای تحویل‌ناپذیر G برقرار است شرح دهیم. رده‌ای از این روابط بسیار عجیب که کار ساده‌سازی را در نظریهٔ کلاس تقارن تانسوری انجام می‌دهند به روابط تعامد مشهور هستند.

قضیهٔ ۲۲.۱.۰ (رابطهٔ تعامد نوع اوّل). فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد.

الف) اگر $\chi_1 : G \to \mathbb{C}$ و $\chi_2 : G \to \mathbb{C}$ دو سرشت تحویل‌ناپذیر و غیر هم‌ارز از G باشند، آنگاه $\sum_{g\in G} \chi_1(g)\chi_2(g^{-1}) = 0$،

ب) اگر $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G باشد، آنگاه $\sum_{g\in G} \chi(g)\chi(g^{-1}) = |G|$.

نتیجهٔ ۰.۱.۲۳ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. دو سرشت تحویل‌ناپذیر از G متمایزاند اگر و فقط اگر نمایش‌های تحویل‌ناپذیری که این دو سرشت را پدید می‌آورند غیر هم‌ارز باشند.

قضیهٔ ۰.۱.۲۴ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی دلخواه از G (نه لزوماً تحویل‌ناپذیر). در این صورت برای هر $g \in G$، $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ که در آن $\overline{\chi(g)}$ مزدوج مختلط $\chi(g)$ است.

قضیهٔ ۰.۱.۲۵ (رابطهٔ تعامد نوع دوم). فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $g, h \in G$. در این صورت

$$\sum_{\chi\in I(G)} \chi(g)\chi(h^{-1}) = \begin{cases} |C_G(g)| & \text{اگر } g \text{ و } h \text{ در } G \text{ مزدوج باشند:} \\ 0 & \text{اگر } g \text{ و } h \text{ در } G \text{ مزدوج نباشند:} \end{cases}$$

که در آن $C_G(g)$ مرکزساز g در G است.

قضیهٔ ۰.۱.۲۶ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک سرشت تحویل‌ناپذیر از G. در این صورت $\sum_{\chi\in I(G)} \chi(1)^2 = |G|$.

تذکر ۰.۱.۲۷ گیریم G گروهی متناهی باشد و روی مجموعهٔ Ω عمل کند. در این صورت به‌راحتی می‌توانیم نشان دهیم که عمل G روی Ω، ۲ـانتقالی است اگر و فقط اگر $\chi : G \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\chi(g) = |\mathrm{fix}(g)| - 1$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G باشد.

قضیهٔ ۰.۱.۲۸ (رابطهٔ تعامد تعمیم‌یافته). فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد.

الف) اگر $\chi_1 : G \to \mathbb{C}$ و $\chi_2 : G \to \mathbb{C}$ دو سرشت تحویل‌ناپذیر و غیر هم‌ارز از G باشند، آنگاه برای هر $h \in G$، $\sum_{g\in G} \chi_1(g^{-1}h)\chi_2(g) = 0$،

ب) اگر $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G باشد، آنگاه برای هر $h \in G$، $\sum_{g\in G} \chi(g^{-1}h)\chi(g) = \frac{|G|}{\chi(1)}\chi(h)$.

برای گروه متناهی G، ردهٔ خاصی از توابع از G به $\mathbb{C}$ وجود دارند که روی کلاس‌های تزویج G، مقدار ثابتی دارند. این توابع را توابع کلاسی می‌نامند و مجموعهٔ تمام این توابع را با $C(G,\mathbb{C})$ نمایش می‌دهند. یعنی اگر $f : G \to \mathbb{C}$ عضوی از $C(G,\mathbb{C})$ باشد، برای هر g و h از G: $f(g) = f(h^{-1}gh)$. جمع معمولی توابع و ضرب معمولی توابع در اسکالر، $C(G,\mathbb{C})$ را به یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ تبدیل می‌کند. به‌راحتی می‌توانیم نشان دهیم بعد این $\mathbb{C}$ فضای برداری برابر است با تعداد کلاس‌های تزویج G. تابع $(\ ,\ )_G : C(G,\mathbb{C}) \times C(G,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ

$$(f_1, f_2)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$$

که در آن $\overline{f_2(g)}$ مزدوج مختلط $f_2(g)$ است، $C(G,\mathbb{C})$ را به یک فضای ضرب داخلی روی $\mathbb{C}$ تبدیل می‌کند.

قضیهٔ ۲۹.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G. در این صورت χ یک تابع کلاسی است، یعنی $I(G) \subseteq C(G,\mathbb{C})$.

تذکر ۳۰.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\chi_1 : G \to \mathbb{C}$ و $\chi_2 : G \to \mathbb{C}$ دو سرشت تحویل‌ناپذیر از G. بنابر قضیهٔ ۲۴.۱.۰

$$(\chi_1, \chi_2)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_1(g)\chi_2(g^{-1}).$$

توجه می‌کنیم که بنابر قضیهٔ ۲۲.۱.۰ و نتیجهٔ ۲۳.۱.۰ برای χ_1 و χ_2 از $I(G)$ داریم

$$(\chi_1, \chi_2)_G = \begin{cases} 0 & \text{اگر } \chi_1 \neq \chi_2 \\ 1 & \text{اگر } \chi_1 = \chi_2 \end{cases}$$

و لذا $I(G)$ یک زیرمجموعهٔ متعامد و یکّه از $C(G,\mathbb{C})$ است و لزوماً در $C(G,\mathbb{C})$ مستقل خطی خواهد بود. در نتیجه

$$|I(G)| \leq \dim C(G,\mathbb{C}) = G \text{ تعداد کلاس‌های تزویج }$$

قضیهٔ زیر حاکی از آن است که در اینجا دقیقاً تساوی رخ می‌دهد.

قضیهٔ ۳۱.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر G برابر است با تعداد کلاس‌های تزویج G، یعنی

$$|I(G)| = G \text{ تعداد کلاس‌های تزویج }$$

قضیهٔ زیر نیز محکی مفید برای تشخیص اینکه یک سرشت از گروه متناهی G تحویل‌ناپذیر است و یا نه می‌دهد.

قضیهٔ ۳۲.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی از G. در این صورت χ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $(\chi, \chi)_G = 1$.

همانطور که دیدیم تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه متناهی G برابر است با تعداد کلاس‌های تزویج G. جدولی که در آن مقادیر سرشتهای تحویل‌ناپذیر G روی نمایندهٔ کلاس‌های تزویج G معین می‌شود، جدولی است که مقدار تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر G را روی تمام اعضای G مشخص می‌کند. برای محاسبهٔ چنین جدولی که معمولاً تکمیل آن کاری است دشوار، از روابط تعامد و دیگر خواص سرشتها استفاده می‌کنند. این نوع جدول به جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G معروف می‌باشد.

فرض کنیم G گروهی متناهی باشد و H زیرگروهی از G. اگر $\chi : G \to \mathbb{C}$ سرشتی از G باشد، تحدید χ به H یعنی $\chi \downarrow_H : H \to \mathbb{C}$ سرشتی از H خواهد بود. توجه می‌کنیم که تحویل‌ناپذیری χ، تحویل‌ناپذیری $\chi \downarrow_H$ را ایجاب نمی‌کند. اکنون سؤالی طبیعی این است که بپرسیم آیا به کمک سرشتی از H می‌توانیم به سرشتی از G برسیم یا نه؟ جواب به این سؤال مثبت است و سرشتی از G که به کمک سرشتی از H که به روشی که در زیر شرح می‌دهیم به‌دست می‌آید سرشت القایی نام دارد. در زیر به شرح این موضوع می‌پردازیم.

گیریم G یک گروه متناهی باشد و H زیرگروهی از G. فرض کنیم $\chi : H \to \mathbb{C}$ سرشتی از H باشد. همریختی $D : H \to GL(V, \mathbb{C})$ نمایشی از H با فضای نمایشی V است که χ را پدید می‌آورد، در نتیجه V یک $\mathbb{C}H$ مدول خواهد بود. می‌توانیم $\mathbb{C}G$ را به‌عنوان یک $\mathbb{C}H$ مدول در نظر بگیریم. لذا دو $\mathbb{C}H$ مدول به‌دست می‌آوریم: V و $\mathbb{C}G$. اکنون حاصلضرب تانسوری این دو $\mathbb{C}H$ مدول را در نظر می‌گیریم و آنرا با $V \uparrow^G$ نمایش می‌دهیم:

$$V \uparrow^G = V \underset{\mathbb{C}H}{\otimes} \mathbb{C}G.$$

$V \uparrow^G$ دارای ساختار یک $\mathbb{C}G$ مدول است و لذا نمایش $D \uparrow^G : G \to GL(V \uparrow^G, \mathbb{C})$ به‌دست می‌آید که سرشتی از G القاء می‌کند معروف به سرشت القایی و آنرا با $\chi \uparrow^G$ نمایش می‌دهیم. توجه می‌کنیم که تحویل‌ناپذیری χ، تحویل‌ناپذیری $\chi \uparrow^G$ را ایجاب نمی‌کند.

قضیهٔ ۳۳.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و H زیرگروهی از G و χ سرشتی از H. در این صورت برای هر $g \in G$، $\chi \uparrow^G (g) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \chi^\circ (ygy^{-1})$ که در آن

$$\chi^\circ(g) = \begin{cases} \chi(g) & : g \in H \text{ اگر } \\ 0 & : g \notin H \text{ اگر } \end{cases}$$

قضیهٔ بالا، ضابطه‌ای برای محاسبهٔ سرشت القایی به‌دست می‌دهد و به کمک آن می‌توانیم نتیجه زیر را به‌دست آوریم.

نتیجهٔ ۳۴.۱.۰ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد که روی مجموعهٔ Ω به‌طور انتقالی عمل می‌کند. H را نیز پایدار ساز نقطه‌ای از Ω در نظر می‌گیریم: $\omega \in \Omega$ ،$H = G_\omega$. در این صورت $1_H \uparrow^G$ سرشت جایگشتی خواهد بود، یعنی برای هر $g \in G$، $1_H \uparrow^G (g) = |\mathrm{fix}(g)|$.

قضیهٔ ۳۵.۱.۰ (قانون تقابل فروبنیوس). فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و H زیرگروهی از G. اگر χ سرشتی از G و ψ سرشتی از H باشد، آنگاه $(\psi, \chi\downarrow_H)_H = (\psi\uparrow^G, \chi)_G$.

۰-۲ جبر چند خطی

تمام مطالب این بخش نیز مانند بخش قبل سنتی هستند و در واقع قسمتی از درسی به‌نام مباحثی در جبر چند خطی که در دورهٔ دکتری تدریس می‌شود. کلاس تقارن تانسوری که در فصول اوّل تا چهارم که ساختمان اصلی این رساله را تشکیل می‌دهند مطرح خواهد شد در واقع زیرفضایی از یک فضای برداری خاص است که دارای ماهیتی است که از جبر چندخطی ناشی می‌شود. لذا این بخش نیز برای راحت‌تر مطالعه کردن فصول اصلی رساله است و در نتیجه اثباتی برای احکام آن ارائه نخواهیم کرد. خوانندهٔ علاقه‌مند را جهت مطالعهٔ عمیق‌تر مفاهیم این بخش و اثبات احکام آن به مراجع [13]، [14] و [17] ارجاع می‌دهیم.

فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد. $\overset{n}{\times} V$ را حاصلضرب دکارتی V با خود به تعداد n بار در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۲.۰ فرض کنیم V و U فضاهای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشند. تابع $\phi : \overset{n}{\times} V \to U$ را یک تابع n خطی می‌نامیم هرگاه ϕ نسبت به هر مؤلفه خطی باشد. یعنی برای هر $c, d \in \mathbb{C}$ و $v_i, v'_i \in V$:

$$\phi(v_1, \dots, cv_i + dv'_i, \dots, v_n) = c\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + d\phi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n).$$

اکنون یکی از $\mathbb{C}$ فضاهای برداری را که به کمک V ساخته می‌شود و با مفهوم تابع n خطی ارتباطی نزدیک دارد معرفی می‌کنیم. این فضا در جبر چند خطی نقش کلیدی دارد.

تعریف ۲.۲.۰ فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد. F را گروه آبلی آزاد روی مجموعهٔ $\overset{n}{\times} V$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مجموعهٔ B متشکل از کلیهٔ اعضایی به‌صورت

$$(v_1, \dots, cv_i + dv_i', \dots, v_n) - c(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) - d(v_1, \dots, v_i', \dots, v_n)$$

$c, d \in \mathbb{C}$ و $v_i, v_i' \in V$ باشد. گیریم K زیرگروهی از F باشد که توسط B تولید می‌شود. در این صورت گروه خارج قسمتی F/K را حاصلضرب تانسوری V با خود به تعداد n بار می‌نامیم و آنرا با $\overset{n}{\otimes} V$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۳.۲.۰ فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد و $v_1, \dots, v_n$ اعضایی از V. در این صورت عضو $(v_1, \dots, v_n) + K \in F/K = \overset{n}{\otimes} V$ را با $v^{\otimes} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ نمایش می‌دهیم و به آن یک تانسور تجزیه‌پذیر می‌گوییم.

تاکنون از روی فضای برداری متناهی بعد V روی $\mathbb{C}$، گروه آبلی $\overset{n}{\otimes} V$ را ساخته‌ایم. اکنون می‌خواهیم ضرب در اسکالری روی $\overset{n}{\otimes} V$ تعریف کنیم تا $\overset{n}{\otimes} V$ به یک $\mathbb{C}$ فضای برداری تبدیل گردد. برای این منظور ضرب در اسکالر $c \in \mathbb{C}$ را روی $\overset{n}{\otimes} V$ به‌صورت

$$c(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = cv_1 \otimes \cdots \otimes v_n = \cdots = v_1 \otimes \cdots \otimes cv_n$$

تعریف می‌کنیم. به‌راحتی می‌توانیم بررسی کنیم $\overset{n}{\otimes} V$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است. کلاس تقارن تانسوری در واقع زیرفضایی از $\overset{n}{\otimes} V$ می‌باشد. اگر V یک $\mathbb{C}$ فضای برداری m بعدی با پایه $\{e_1, \dots, e_m\}$ فرض شود، $\overset{n}{\otimes} V$ یک $\mathbb{C}$ فضای برداری m^n بعدی است و پایهٔ آن از اعضایی به‌صورت $e_\alpha^{\otimes} = e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n}$ تشکیل شده است که در آن $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ این خاصیت را دارد که $1 \leq \alpha_i \leq m$. به‌راحتی می‌توانیم بررسی کنیم که برای هر $c, d \in \mathbb{C}$ و $v_i, v_i' \in V$ تساوی

$$v_1 \otimes \cdots \otimes (cv_i + dv_i') \otimes \cdots \otimes v_n = c(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_n) + d(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i' \otimes \cdots \otimes v_n)$$

برقرار است و این حاکی از آن است که تابع $\otimes : \overset{n}{\times} V \to \overset{n}{\otimes} V$ با ضابطهٔ $\otimes(v_1, \dots, v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ یک تابع n خطی است. در زیر به خاصیتی از حاصلضرب تانسوری که به خاصیت جهانی معروف است اشاره می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۲.۰ (خاصیت جهانی حاصلضرب تانسوری). فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت برای هر $\mathbb{C}$ فضای برداری متناهی بعد U و هر تابع n خطی $\psi : \overset{n}{\times} V \to U$، تبدیل خطی منحصر به‌فرد

$f : \overset{n}{\otimes} V \to U$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $f\otimes = \psi$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\otimes} & \overset{n}{\otimes} V \\ \psi \downarrow & \swarrow f & \\ U & & \end{array}$$

اکنون فرض می‌کنیم V یک فضای یکانی m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد، یعنی V به یک ضرب داخلی مجهز باشد. این ضرب داخلی، ضرب داخلی دیگری را روی $\overset{n}{\otimes} V$ القاء می‌کند که عمل آن روی تانسورهای تجزیه‌پذیر به‌صورت زیر است:

$$\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle u_i | v_i \rangle.$$

از این پس اگر V را فضای یکانی فرض کنیم، $\overset{n}{\otimes} V$ را فضای یکانی با ضرب داخلی بالا در نظر می‌گیریم.

فصل اول

کلاس تقارن تانسوری

این فصل از دو بخش تشکیل شده است. در بخش ۱ متقارن‌سازها را بررسی خواهیم کرد. متقارن‌سازها به‌کمک سرشتهای تحویل‌ناپذیر از گروه G به‌دست می‌آیند و عملگرهای خطی روی فضاهای تانسوری می‌باشند. تصویر فضاهای تانسوری تحت متقارن سازها، کلاس تقارن تانسوری را پدید می‌آورد که در بخش ۲ به بررسی آن خواهیم پرداخت. توجه می‌کنیم که تمام مطالب این فصل کارهای تحقیقاتی بوده‌اند که در طی ۳۰ سال اخیر در مجلات بین‌المللی به چاپ رسیده‌اند و مریس نیز که یکی از بنیانگذاران این شاخه می‌باشد تمام این مطالب را در کتابی مبسوط (نگاه کنید به [17]) جمع‌آوری کرده است. دقت می‌کنیم که در سراسر این فصل V را فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ فرض می‌کنیم، G را زیرگروهی از گروه متقارن $\$_n$ و χ را نیز سرشتی تحویل‌ناپذیر از G.

۱-۱ متقارن سازها

در این بخش فرض می‌کنیم V فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم G زیرگروهی از گروه متقارن $\$_n$ باشد و χ سرشتی تحویل ناپذیر از G.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم $\sigma \in G$. به تابع $A(\sigma) : \overset{n}{\times} V \to \overset{n}{\otimes} V$ که آنرا با ضابطهٔ

$$A(\sigma)(v_1, \ldots, v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$$

تعریف می‌کنیم تابع جایگشتی می‌گوییم.

تذکر ۲.۱.۱ برای هر $c, d \in \mathbb{C}$ و $v_i, v_i' \in V$:

$$A(\sigma)(v_1, \ldots, cv_i + dv_i', \ldots, v_n) = cA(\sigma)(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + dA(\sigma)(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n).$$

یعنی $A(\sigma)$ تابعی n خطی است. بنابر خاصیت جهانی حاصلضرب تانسوری، قضیهٔ ۴.۲.۰، عملگر خطی منحصر به‌فرد $P(\sigma) : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$، معروف به عملگر جایگشتی، موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $P(\sigma)\otimes = A(\sigma)$.

$$\begin{tikzcd} \overset{n}{\times} V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "A(\sigma)"'] & \overset{n}{\otimes} V \arrow[dl, "P(\sigma)"] \\ \overset{n}{\otimes} V & \end{tikzcd}$$

این نیز به این معنی است که عمل $P(\sigma)$ روی تانسورهای تجزیه‌پذیر به‌صورت زیر است:

$$P(\sigma)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

قضیهٔ زیر خاصیت مهمی از عملگر خطی $P(\sigma)$ را بیان می‌کند. به‌کمک این خاصیت نمایشی وفادار از گروه G با فضای نمایشی $\overset{n}{\otimes} V$ به‌دست خواهیم آورد. بالاخص این خاصیت از $P(\sigma)$ روابط مهمی را برای کلاس تقارن تانسوری پدید خواهد آورد.

قضیهٔ ۳.۱.۱ برای هر $\sigma, \tau \in G$ داریم $P(\sigma)P(\tau) = P(\sigma\tau)$.

برهان. برای هر v_1،...،v_n از V

$$\begin{aligned} P(\sigma)P(\tau)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= P(\sigma)(v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau^{-1}(n)}) \\ &= v_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))} \otimes \cdots \otimes v_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(n))} \\ &= v_{(\sigma\tau)^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{(\sigma\tau)^{-1}(n)} \\ &= P(\sigma\tau)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n), \end{aligned}$$

و لذا حکم ثابت می‌شود. □

قضیهٔ بالا وارونپذیری عملگر خطی $P(\sigma)$ را به‌دست می‌دهد که نتیجهٔ زیر اشاره‌ای رسمی به این موضوع می‌باشد.

نتیجهٔ ۴.۱.۱ برای هر $\sigma \in G$، عملگر خطی $P(\sigma) : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$ وارونپذیر است، بالاخص $P(\sigma)^{-1} = P(\sigma^{-1})$.

برهان. گیریم $I : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$ عملگر خطی همانی باشد. برای هر v_1،...،v_n از V

$$P(1)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{1^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{1^{-1}(n)} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n,$$

و لذا $I = P(1)$. اکنون از قضیهٔ ۳.۱.۱ به‌دست می‌آوریم

$$I = P(1) = P(\sigma\sigma^{-1}) = P(\sigma)P(\sigma^{-1})$$

و این نیز به این معنی است که $P(\sigma)$ وارون‌پذیر است با وارون $P(\sigma^{-1})$، یعنی $P(\sigma)^{-1} = P(\sigma^{-1})$. □

نتیجهٔ ۴.۱.۱ به این معنی است که برای هر $\sigma \in G$، $P(\sigma) \in GL(\overset{n}{\otimes} V, \mathbb{C})$ و لذا قضیهٔ ۳.۱.۱ نتیجه می‌دهد که $P : G \to GL(\overset{n}{\otimes} V, \mathbb{C})$ با تعریف $P : \sigma \to P(\sigma)$ یک نمایش از گروه G با فضای نمایشی $\overset{n}{\otimes} V$ است. اکنون نشان می‌دهیم P نمایشی وفادار از G است. دو لم زیر برای این منظور می‌باشد.

لم ۵.۱.۱ فرض کنیم v_1،...،v_n در V باشند. در این صورت $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = o$ اگر و فقط اگر iای، $1 \le i \le n$، موجود باشد که $v_i = o$.

برهان. گیریم iای، $1 \le i \le n$، موجود باشد که $v_i = o$. در این صورت $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_1 \otimes \cdots \otimes o \otimes \cdots \otimes v_n = o$. برعکس، فرض کنیم $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = o$. اگر برای هر i، $1 \le i \le n$، داشته باشیم $v_i \ne o$، آنگاه می‌توانیم برای هر i، $1 \le i \le n$، تابعک خطی $f_i : V \to \mathbb{C}$ را طوری تعریف کنیم که $f_i(v_i) = 1$. اکنون $f : \overset{n}{\times} V \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ $f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ تعریف می‌کنیم. برای هر $c, d \in \mathbb{C}$ و $x_i, x'_i \in V$:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, cx_i + dx'_i, \ldots, x_n) &= f_1(x_1) \ldots f_i(cx_i + dx'_i) \ldots f_n(x_n) \\ &= f_1(x_1) \ldots (cf_i(x_i) + df_i(x'_i)) \ldots f_n(x_n) \\ &= cf_1(x_1) \ldots f_i(x_i) \ldots f_n(x_n) + df_1(x_1) \ldots f_i(x'_i) \ldots f_n(x_n) \\ &= cf(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + df(x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

یعنی f تابعی n خطی است. بنابر خاصیت جهانی حاصلضرب تانسوری، قضیهٔ ۴.۲.۰، تابعک خطی منحصر به‌فرد $\hat{f} : \overset{n}{\otimes} V \to \mathbb{C}$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $\hat{f}\otimes = f$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\otimes} & \overset{n}{\otimes} V \\ f \downarrow & \swarrow \hat{f} & \\ \mathbb{C} & & \end{array}$$

این نیز به این معنی است که عمل $\hat{f}$ روی تانسورهای تجزیه‌پذیر به‌صورت زیر است:

$$\hat{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n).$$

حال می‌توانیم بنویسیم $1 = f_1(v_1) \ldots f_n(v_n) = \hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \hat{f}(o) = 0$ و این تناقض است. در نتیجه، iی، $1 \leq i \leq n$، موجود است که $v_i = o$. □

لم ۶.۱.۱ فرض کنیم $v_1, \ldots, v_n$ و $u_1, \ldots, u_n$ در V باشند. اگر $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \neq o$، آنگاه $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ اگر و فقط اگر برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $c_i \in \mathbb{C}$ موجود باشد که $v_i = c_i u_i$ و $c_1 \ldots c_n = 1$.

برهان. گیریم برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $c_i \in \mathbb{C}$ موجود باشد که $v_i = c_i u_i$ و $c_1 \ldots c_n = 1$. در این صورت

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = c_1 u_1 \otimes \cdots \otimes c_n u_n = (c_1 \ldots c_n)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n.$$

برعکس، فرض می‌کنیم $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$. چون $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \neq o$، لذا بنابر لم ۵.۱.۱ برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $v_i \neq o$ و $u_i \neq o$. برای kی دلخواه، $1 \leq k \leq n$، $f_k : V \to \mathbb{C}$ را تابعک خطی دلخواهی در نظر می‌گیریم. برای هر i، $i \neq k$، $f_i : V \to \mathbb{C}$ را تابعکی خطی فرض می‌کنیم با این خاصیت که $f_i(v_i) = 1$. اکنون مانند برهان لم ۵.۱.۱ می‌توانیم نتیجه بگیریم که تابعک خطی $\hat{f} : \overset{n}{\otimes} V \to \mathbb{C}$ موجود است که $\hat{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$، و لذا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= f_1(v_1) \ldots f_n(v_n) \\ &= f_k(v_k), \\ \hat{f}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) &= f_1(u_1) \ldots f_n(u_n) \\ &= (f_1(u_1) \ldots f_{k-1}(u_{k-1}) f_{k+1}(u_{k+1}) \ldots f_n(u_n)) f_k(u_k) \\ &= c_k f_k(u_k) \\ &= f_k(c_k u_k), \end{aligned}$$

که در آن

$$c_k = f_1(u_1)\dots f_{k-1}(u_{k-1})f_{k+1}(u_{k+1})\dots f_n(u_n).$$

امّا $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ و لذا $f_k(c_k u_k) = f_k(v_k)$، در نتیجه دلخواه بودن f_k به‌دست می‌دهد $v_k = c_k u_k$. چون k نیز دلخواه فرض شده بود، پس برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $v_i = c_i u_i$. اکنون با توجه به اینکه $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ به‌دست می‌آوریم $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = c_1 u_1 \otimes \cdots \otimes c_n u_n$. در نتیجه $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = (c_1 \dots c_n)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)$ و لذا $c_1 \dots c_n = 1$. $\square$

حال به کمک دو لم اخیر می‌توانیم ثابت کنیم P نمایشی وفادار از G می‌باشد. این مطلب در قضیهٔ زیر بیان شده است.

قضیهٔ ۷.۱.۱ فرض کنیم V یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد طوری که $m \geq 2$. در این‌صورت $P : G \to GL(\overset{n}{\otimes} V, \mathbb{C})$ نمایشی وفادار از گروه G می‌باشد.

برهان. اینکه P خوش‌تعریف است، یعنی برای هر $\sigma \in G$، $P(\sigma) \in GL(\overset{n}{\otimes} V, \mathbb{C})$ و اینکه P یک همریختی از G است را قبلاً بررسی کرده‌ایم. پس P یک نمایش از گروه G می‌باشد و آنچه باقی می‌ماند این است که نشان دهیم P وفادار است. گیریم $\sigma \in Ker\ P$، در نتیجه $P(\sigma) = I$ که در آن $I : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$ عملگر خطی همانی است. اکنون $v_1, \dots, v_n$ در V را طوری انتخاب می‌کنیم که هیچکدام مضرب اسکالری از دیگری نباشد. توجه می‌کنیم که $P(\sigma)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = I(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ و لذا $v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$. طریقهٔ انتخاب v_iها نتیجه می‌دهد که تمام v_iها غیرصفر هستند و لذا بنابر لم ۵.۱.۱، $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \neq o$. در نتیجه از لم ۶.۱.۱ به‌دست می‌آوریم برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $c_i \in \mathbb{C}$ موجود است که $v_{\sigma^{-1}(i)} = c_i v_i$ و $c_1 \dots c_n = 1$. طریقهٔ انتخاب v_iها نتیجه می‌دهد که برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $c_i = 1$ و $\sigma^{-1}(i) = i$ یا $\sigma(i) = i$، یعنی $\sigma = 1$. پس $KerP = \{1\}$ و لذا P وفادار است. $\square$

عملگر خطی $P(\sigma) : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$ طوری است که از روی عضو $\sigma \in G$ پدید آمده است. اکنون به‌نوعی می‌خواهیم عملگری خطی بسازیم که تمام اعضای G (و نه فقط σی خاص بالا) در آن درگیر باشند. مناسب‌ترین کار برای انجام این منظور در نظرگرفتن میانگین وزنی $P(\sigma)$ها می‌باشد و برای این منظور از سرشتهای تحویل‌ناپذیر G به‌عنوان وزن استفاده می‌کنیم. این عملگر خطی را متقارن‌ساز وابسته به G و χ می‌نامیم که آنرا در تعریف زیر معرفی می‌کنیم.

تعریف ۸.۱.۱ به عملگر خطی $T(G,\chi):\overset{n}{\otimes}V\to\overset{n}{\otimes}V$ با تعریف

$$T(G,\chi)=\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)$$

متقارن‌ساز وابسته به G و χ می‌گوییم.

اکنون می‌خواهیم خواص متقارن‌ساز وابسته به G و χ را بررسی کنیم. در قضیه‌های زیر به بیان این خواص خواهیم پرداخت.

قضیهٔ ۹.۱.۱ فرض کنیم $\tau\in G$. در این صورت $P(\tau)T(G,\chi)=T(G,\chi)P(\tau)$.

برهان.

$$\begin{aligned}
P(\tau)T(G,\chi)&=P(\tau)\left(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)\right)\\
&=\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\tau)P(\sigma)\\
&=\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\tau\sigma) && \text{بنابر قضیهٔ ۳.۱.۱}\\
&=\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\lambda\in G}\chi(\tau^{-1}\lambda)P(\lambda)\\
&=\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\lambda\in G}\chi(\lambda\tau^{-1})P(\lambda) && \text{بنابر قضیهٔ ۲۹.۱.۰}\\
&=\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma\tau)\\
&=\left(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)\right)P(\tau) && \text{بنابر قضیهٔ ۳.۱.۱}\\
&=T(G,\chi)P(\tau).\quad\square
\end{aligned}$$

قضیهٔ ۱۰.۱.۱ عملگر خطی $T(G,\chi):\overset{n}{\otimes}V\to\overset{n}{\otimes}V$ خودتوان است، یعنی $T(G,\chi)^2=T(G,\chi)$.

برهان.

$$\begin{aligned}
T(G,\chi)^{۲} &= \left(\frac{\chi(۱)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)\right)\left(\frac{\chi(۱)}{|G|}\sum_{\tau\in G}\chi(\tau)P(\tau)\right)\\
&= \frac{\chi(۱)^{۲}}{|G|^{۲}}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}\chi(\sigma)\chi(\tau)P(\sigma)P(\tau)\\
&= \frac{\chi(۱)^{۲}}{|G|^{۲}}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}\chi(\sigma)\chi(\tau)P(\sigma\tau) && \text{بنابر قضیهٔ ۳.۱.۱}\\
&= \frac{\chi(۱)^{۲}}{|G|^{۲}}\sum_{\lambda\in G}\left(\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-۱}\lambda)\chi(\sigma)\right)P(\lambda)\\
&= \frac{\chi(۱)^{۲}}{|G|^{۲}}\sum_{\lambda\in G}\left(\frac{|G|}{\chi(۱)}\chi(\lambda)\right)P(\lambda) && \text{بنابر قضیهٔ ۲۸.۱.۰}\\
&= \frac{\chi(۱)}{|G|}\sum_{\lambda\in G}\chi(\lambda)P(\lambda)\\
&= T(G,\chi). \qquad \square
\end{aligned}$$

قضیهٔ ۱۱.۱.۱ فرض کنیم χ و ξ دو سرشت تحویل‌ناپذیر از گروه G باشند. اگر $\xi \neq \chi$، آنگاه $T(G,\chi)T(G,\xi) = o$.

برهان.

$$\begin{aligned}
T(G,\chi)T(G,\xi) &= \left(\frac{\chi(۱)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)\right)\left(\frac{\xi(۱)}{|G|}\sum_{\tau\in G}\xi(\tau)P(\tau)\right)\\
&= \frac{\chi(۱)\xi(۱)}{|G|^{۲}}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}\chi(\sigma)\xi(\tau)P(\sigma)P(\tau)\\
&= \frac{\chi(۱)\xi(۱)}{|G|^{۲}}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}\chi(\sigma)\xi(\tau)P(\sigma\tau) && \text{بنابر قضیهٔ ۳.۱.۱}\\
&= \frac{\chi(۱)\xi(۱)}{|G|^{۲}}\sum_{\lambda\in G}\left(\sum_{\sigma\in G}\xi(\sigma^{-۱}\lambda)\chi(\sigma)\right)P(\lambda)\\
&= \frac{\chi(۱)\xi(۱)}{|G|^{۲}}\sum_{\lambda\in G}(\circ)P(\lambda) && \text{بنابر قضیهٔ ۲۸.۱.۰}\\
&= o. \qquad \square
\end{aligned}$$

قضیهٔ ۱۲.۱.۱ $\sum\limits_{\chi\in I(G)} T(G,\chi) = I$ که در آن $I : \overset{n}{\otimes}V \to \overset{n}{\otimes}V$ عملگر خطی همانی است.

برهان.

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\in I(G)} T(G,\chi) &= \sum_{\chi\in I(G)}\left(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)\right)\\ &= \sum_{\chi\in I(G)}\sum_{\sigma\in G}\frac{\chi(1)}{|G|}\chi(\sigma)P(\sigma)\\ &= \sum_{\sigma\in G}\sum_{\chi\in I(G)}\frac{\chi(1)}{|G|}\chi(\sigma)P(\sigma)\\ &= \sum_{\sigma\in G}P(\sigma)\left(\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in I(G)}\chi(1)\chi(\sigma)\right)\\ &= P(1) \qquad \text{بنابر قضیهٔ ۲۵.۱.۰}\\ &= I. \qquad \square\end{aligned}$$

قضایای ۱۰.۱.۱، ۱۱.۱.۱ و ۱۲.۱.۱ نشان می‌دهند که مجموعهٔ

$$\left\{T(G,\chi):\overset{n}{\otimes}V\to\overset{n}{\otimes}V \mid T(G,\chi)=\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma);\ \chi\in I(G)\right\}$$

مجموعه‌ای از عملگرهای خطی خودتوان و متعامد است که مجموع آنها همانی می‌باشد. متعامد بودن این عملگرها همان خاصیت مطرح شده در قضیهٔ ۱۱.۱.۱ می‌باشد. اکنون می‌خواهیم رده‌ای از توابع n خطی را تعریف کنیم که ارتباطی نزدیک با متقارن‌سازها دارند. این ارتباط در مثال ۱۴.۱.۱ مشخص می‌شود و در بخش ۲، با بررسی مطالب مربوط به کلاس تقارن تانسوری اهمیت این ارتباط معلوم می‌گردد.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم U یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد. تابع n خطی $\phi:\overset{n}{\times}V\to U$ را متقارن نسبت به G و χ می‌نامیم هرگاه برای هر $v_1,\ldots,v_n$ از V

$$\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\phi(v_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,v_{\sigma^{-1}(n)})=\phi(v_1,\ldots,v_n).$$

مثال ۱۴.۱.۱ نشان می‌دهیم تابع $\phi:\overset{n}{\times}V\to\overset{n}{\otimes}V$ با ضابطهٔ $\phi(v_1,\ldots,v_n)=T(G,\chi)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)$ یک تابع n خطی متقارن نسبت به G و χ است.

خطی بودن $T(G,\chi)$، به‌وضوح n خطی بودن ϕ را نتیجه می‌دهد. اکنون برای هر $v_1,\ldots,v_n$ از V داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\phi(v_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,v_{\sigma^{-1}(n)}) &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)T(G,\chi)(v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)})\\
&= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\left(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\tau\in G}\chi(\tau)P(\tau)(v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)})\right)\\
&= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}\chi(\sigma)\chi(\tau)v_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(n))}\\
&= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2}\sum_{\lambda\in G}\left(\sum_{\tau\in G}\chi(\tau^{-1}\lambda)\chi(\tau)\right)v_{\lambda^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\lambda^{-1}(n)}\\
&= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2}\sum_{\lambda\in G}\left(\frac{|G|}{\chi(1)}\chi(\lambda)\right)v_{\lambda^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\lambda^{-1}(n)} \quad \text{بنابر قضیهٔ } ۲۸.۱.۰\\
&= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\lambda\in G}\chi(\lambda)v_{\lambda^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\lambda^{-1}(n)}\\
&= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\lambda\in G}\chi(\lambda)P(\lambda)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\\
&= T(G,\chi)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\\
&= \phi(v_1,\ldots,v_n).
\end{aligned}$$

لذا ϕ یک تابع n خطی متقارن نسبت به G و χ است.

۱-۲ کلاس تقارن تانسوری

در این بخش کلاس تقارن تانسوری را تعریف می‌کنیم. ارتباط کلاس تقارن تانسوری با متقارن‌سازها در این بخش ظاهر خواهد شد. همانطورکه قبلاً اشاره کردیم، در این بخش نیز V یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ فرض می‌شود و G زیرگروهی از S_n و χ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم S یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد. S را یک کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ می‌نامیم هرگاه تابع n خطی $\phi:\overset{n}{\times}V\to S$ که متقارن نسبت به G و χ می‌باشد موجود باشد طوری که:

۱) $\langle Im\ \phi\rangle = S$،

۲) برای هر $\mathbb{C}$ فضای برداری متناهی بعد U و هر تابع n خطی $\psi : \overset{n}{\times} V \to U$ که نسبت به G و χ متقارن است، تبدیل خطی منحصر به فرد $f : S \to U$ موجود باشد که نمودار زیر را جابه‌جایی کند، یعنی $f\phi = \psi$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\phi} & S \\ \psi \downarrow & \swarrow f & \\ U & & \end{array}$$

قضیهٔ ۲.۲.۱ هر دو کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ به‌عنوان $\mathbb{C}$ فضای برداری یکریخت هستند.

برهان. گیریم S و S' هر دو کلاس‌های تقارن تانسوری وابسته به G و χ باشند. پس توابع n خطی $\phi : \overset{n}{\times} V \to S$ و $\phi' : \overset{n}{\times} V \to S'$ که نسبت به G و χ متقارن هستند موجودند و برای آنها شرایط ۱ و ۲ی تعریف ۱.۲.۱ برقرار است. از اینکه S کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ است، شرط ۲ی تعریف ۱.۲.۱ نتیجه می‌دهد که تبدیل خطی منحصر به‌فرد $f : S \to S'$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $f\phi = \phi'$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\phi} & S \\ \phi' \downarrow & \swarrow f & \\ S' & & \end{array}$$

از طرفی با توجه به اینکه S' کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ است، شرط ۲ی تعریف ۱.۲.۱ نتیجه می‌دهد که تبدیل خطی منحصر به‌فرد $g : S' \to S$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $g\phi' = \phi$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\phi'} & S' \\ \phi \downarrow & \swarrow g & \\ S & & \end{array}$$

لذا $fg = ۱_{S'}$ و $gf = ۱_S$ و در نتیجه f یکریختی است و لذا $S \cong S'$. □

قضیهٔ ۳.۲.۱ کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ موجود است.

برهان. قرار می‌دهیم $S = Im\ T(G,\chi)$. واضح است که S یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ است. همچنین $\phi : \overset{n}{\times} V \to S$ را با ضابطهٔ $\phi(v_۱, \dots, v_n) = T(G,\chi)(v_۱ \otimes \cdots \otimes v_n)$ تعریف می‌کنیم. بنابر مثال ۱۴.۱.۱، ϕ تابعی n خطی و متقارن نسبت به G و χ است. با توجه به اینکه $T(G,\chi)$ عملگری خطی است لذا $\langle Im\ \phi \rangle = \langle Im\ T(G,\chi) \rangle = Im\ T(G,\chi) = S$ و شرط ۱ تعریف ۱.۲.۱ برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم U فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ و $\psi : \overset{n}{\times} V \to U$ یک تابع n خطی باشد که نسبت به G و χ متقارن است. بنابر خاصیت جهانی حاصلضرب تانسوری، قضیهٔ ۴.۲.۰، تبدیل خطی منحصر به‌فرد $h : \overset{n}{\otimes} V \to U$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $h\otimes = \psi$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\otimes} & \overset{n}{\otimes} V \\ \psi \downarrow & \swarrow h & \\ U & & \end{array}$$

حال فرض می‌کنیم $h|_S = f$. به وضوح f یک تبدیل خطی از S به U است و برای هر $v_1, \ldots, v_n$ از V داریم:

$$\begin{aligned}
f\phi(v_1, \ldots, v_n) &= h\phi(v_1, \ldots, v_n) \\
&= h(T(G,\chi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) \\
&= h(\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) P(\sigma)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) \\
&= h(\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) h(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) h \otimes (v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \psi(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= \psi(v_1, \ldots, v_n),
\end{aligned}$$

پس $f\phi = \psi$. از طرفی اگر $f' : S \to U$ تبدیل خطی دیگری باشد که $f'\phi = \psi$، آنگاه برای هر $s \in S$، $s = T(G,\chi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$، داریم:

$$\begin{aligned}
f'(s) &= f'(T(G,\chi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) \\
&= f'\phi(v_1, \ldots, v_n) \\
&= \psi(v_1, \ldots, v_n) \\
&= f\phi(v_1, \ldots, v_n) \\
&= f(T(G,\chi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) \\
&= f(s),
\end{aligned}$$

و لذا $f=f'$. یعنی $f:S\to U$ تبدیل خطی منحصر به‌فردی است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند.

$$\begin{array}{lcl} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\phi} & S \\ \psi\downarrow & \swarrow f & \\ U & & \end{array}$$

پس شرط ۲ی تعریف ۱.۲.۱ نیز برقرار است و لذا S کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ است. □

با توجه به قضیه‌های ۲.۲.۱ و ۳.۲.۱ از این پس می‌توانیم S معرفی شده در قضیهٔ ۳.۲.۱ را کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ در نظر بگیریم و لذا می‌توانیم تعریف زیر را به‌عنوان تعریف معادل دیگری از کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ ارائه دهیم.

تعریف ۴.۲.۱ تصویر $\overset{n}{\otimes} V$ تحت $T(G,\chi)$ که زیرفضایی از $\overset{n}{\otimes} V$ است را کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ می‌نامیم و آنرا با $V_\chi^n(G)$ نمایش می‌دهیم، یعنی $V_\chi^n(G)=Im\ T(G,\chi)$.

تعریف ۵.۲.۱ تصویر تانسور تجزیه‌پذیر $v^\otimes=v_1\otimes\cdots\otimes v_n$ از $\overset{n}{\otimes} V$ تحت $T(G,\chi)$، یعنی $T(G,\chi)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)$ که عضوی از $V_\chi^n(G)$ است را با $v^*=v_1*\cdots*v_n$ نمایش می‌دهیم و به آن یک تانسور تجزیه‌پذیر متقارن نسبت به G و χ می‌گوییم.

مثال ۶.۲.۱ فرض کنیم $\$_n$ گروه متقارن باشد. ϵ را نیز سرشت متناوب $\$_n$ در نظر می‌گیریم، یعنی $\epsilon:\$_n\to\mathbb{C}$ با ضابطهٔ

$$\epsilon(\sigma)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } \sigma \text{ زوج باشد:} \\ -1 & \text{اگر } \sigma \text{ فرد باشد:} \end{cases}$$

در این صورت کلاس تقارن تانسوری وابسته به $\$_n$ و ϵ یعنی $V_\epsilon^n(\$_n)$ همان فضای گراسمان است و معمولاً آنرا با $\wedge_\epsilon^n(\$_n)$ نمایش می‌دهیم. همچنین تصویر $v_1\otimes\cdots\otimes v_n$ تحت $T(\$_n,\epsilon)$ را، بجای $v_1*\cdots*v_n$ با $v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ نشان می‌دهیم.

بنابر مثال بالا، در می‌یابیم که کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ در واقع تعمیمی از فضای گراسمان است که در اواخر قرن نوزدهم کاملاً شناخته شده بود و لذا می‌توان گفت مطالعهٔ روی کلاس تقارن تانسوری سابقه‌ای حدود یک قرن دارد. در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که فضای تانسوری وابسته به V، حاصل جمع مستقیمی از کلاس‌های تقارن تانسوری است و این مطلب اهمیت مطالعهٔ کلاس‌های تقارن تانسوری را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۷.۲.۱ فرض کنیم V یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد و G زیرگروهی از S_n. در این صورت

$$\overset{n}{\otimes} V = \bigoplus_{\chi\in I(G)} V_\chi^n(G)$$

برهان. حکم با توجه به قضایای ۱۰.۱.۱، ۱۱.۱.۱ و ۱۲.۱.۱ و یک قضیهٔ مقدماتی از جبرخطی[1] بدیهی می‌باشد. □

۱) فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد و $T_1,\ldots,T_s$ عملگرهای خطی روی V. اگر برای هر i، $1\le i\le s$، $T_i^2=T_i$ و برای هر $i\neq j$، $1\le i\le s$ و $1\le j\le s$، $T_iT_j=o$ و $T_1+\cdots+T_s=I$ که در آن I عملگر خطی همانی است، آنگاه $V=Im\,T_1\oplus\cdots\oplus Im\,T_s$.

فصل دوم

بعد کلاس تقارن تانسوری

این فصل از چهار بخش تشکیل شده است. در بخش ۱ مطالب سنتی مربوط به یافتن فرمول بعد کلاس تقارن تانسوری مطرح خواهد شد. این فرمول در [13] توسط مارکوس ثابت شده است. در بخش‌های ۲، ۳ و ۴ کلاس‌های تقارن تانسوری وابسته به گروه‌هایی معین را در نظر گرفته‌ایم و فرمول صریح بعد را برای این کلاس‌های تقارن تانسوری محاسبه کرده‌ایم. محاسبهٔ تمام این بعدها کارهای تحقیقاتی جدید محسوب می‌شوند و قبلاً این ابعاد به‌دست نیامده‌اند. تمامی این مطالب در بخشی از [4]، [5]، [6] و [7] ظاهر شده‌اند.

۲-۱ محاسبهٔ فرمول بعد

در این بخش می‌خواهیم فرمول بعد کلاس تقارن تانسوری را که مارکوس (نگاه کنید به [13]) آنرا محاسبه کرده است به‌دست آوریم. برای اثباتی قابل فهم از این فرمول اشاره به تعریف و قضیهٔ زیر مفید خواهد بود. در این بخش V فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ فرض می‌شود، G را نیز زیرگروهی از S_n در نظر می‌گیریم و χ را سرشتی تحویل‌ناپذیر از G.

تعریف ۱.۱.۲ مجموعهٔ تمام nتایی‌های مرتب که مؤلفه‌های آنها از اعداد ۱، ۲، ... ، m تشکیل شده است را با Γ_m^n نمایش می‌دهیم، یعنی

$$\Gamma_m^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid 1 \leq \alpha_i \leq m\}.$$

قضیهٔ ۲.۱.۲ برای گروه G و مجموعهٔ Γ_m^n، تابع $\circ : G \times \Gamma_m^n \to \Gamma_m^n$ را با ضابطهٔ $\sigma.\alpha = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)})$ تعریف می‌کنیم. در این صورت G با $\circ$ روی Γ_m^n عمل می‌کند.

برهان. توجه می‌کنیم که برای هر $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_m^n$ و هر $\sigma, \tau \in G$ داریم:

$$\begin{aligned} 1.\alpha &= (\alpha_{1^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{1^{-1}(n)}) \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \alpha, \\ \sigma.(\tau.\alpha) &= \sigma.(\alpha_{\tau^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\tau^{-1}(n)}) \\ &= (\alpha_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))}, \dots, \alpha_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(n))}) \\ &= (\alpha_{(\sigma\tau)^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{(\sigma\tau)^{-1}(n)}) \\ &= \sigma\tau.\alpha, \end{aligned}$$

و لذا G روی Γ_m^n عمل می‌کند. □

اکنون به کمک لم زیر می‌توانیم فرمول بعد مربوط به کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ را به‌دست آوریم.

لم ۳.۱.۲ برای هر $\sigma \in G$، اثر عملگر خطی $P(\sigma) : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$ برابر است با $m^{c(\sigma)}$، یعنی $tr\ P(\sigma) = m^{c(\sigma)}$، که در آن $c(\sigma)$ تعداد دورهای موجود در تجزیهٔ دوری σ، با احتساب دورهای به‌طول یک است.

برای این لم دو برهان می‌آوریم. هر چند برهان دوم ساده‌تر از برهان اوّل است و هر دو برهان از نیمه به بعد مشترک هستند، ولیکن به‌خاطر تکنیک‌های متفاوت موجود در آنها آوردن هر دو عملی تکراری محسوب نمی‌گردد.

برهان اوّل. فرض می‌کنیم $B = \{e_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ پایه‌ای برای V باشد، در نتیجه $B^{\otimes} = \{e_\alpha^{\otimes} \mid \alpha \in \Gamma_m^n\}$ پایه‌ای برای $\overset{n}{\otimes} V$ خواهد بود. ماتریس $P(\sigma)$ را نسبت به پایهٔ $B^{\otimes}$ در نظر می‌گیریم. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس برابر $tr\ P(\sigma)$ می‌باشد. برای یافتن درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس به‌صورت زیر عمل می‌کنیم[1]. فرض می‌کنیم $\{f_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ پایهٔ دوگان B باشد، در این صورت $\{h_\beta \mid \beta \in \Gamma_m^n\}$ پایهٔ دوگان $B^{\otimes}$ است که در آن $h_\beta : \overset{n}{\otimes} V \to \mathbb{C}$ تابعک خطی می‌باشد که عمل آن روی تانسورهای تجزیه‌پذیر به این صورت است:

$$h_\beta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f_{\beta_1}(v_1) \dots f_{\beta_n}(v_n).$$

۱) اگر $T : V \to V$ یک عملگر خطی باشد و $\{e_1, \dots, e_m\}$ پایه‌ای برای V، آنگاه درایهٔ (i, j) ماتریس T نسبت به این پایه برابر است با $f_i(T(e_j))$ که در آن $\{f_1, \dots, f_m\}$ پایهٔ دوگان پایهٔ ذکر شده برای V است.

لذا درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $P(\sigma)$ نسبت به پایهٔ $B^{\otimes}$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} h_\alpha(P(\sigma)(e_\alpha^{\otimes})) &= h_\alpha(e_{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{\sigma^{-1}(n)}}) \\ &= f_{\alpha_1}(e_{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}}) \cdots f_{\alpha_n}(e_{\alpha_{\sigma^{-1}(n)}}). \end{aligned}$$

اگر $\sigma.\alpha = \alpha$ آنگاه $h_\alpha(P(\sigma)(e_\alpha^{\otimes})) = 1$ و در غیر این صورت $h_\alpha(P(\sigma)(e_\alpha^{\otimes})) = 0$. پس $tr\ P(\sigma)$ برابر است با تعداد $\alpha \in \Gamma_m^n$هایی که $\sigma.\alpha = \alpha$. فرض کنیم σ در تجزیهٔ به دورهای مجزا، با احتساب دورهای به‌طول یک، به $c(\sigma)$ دور تجزیه شده باشد:

$$\sigma = (t_1^1 \dots t_{l_1}^1) \cdots (t_1^{c(\sigma)} \dots t_{l_{c(\sigma)}}^{c(\sigma)}).$$

امّا شرط لازم و کافی برای اینکه $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ دارای این خاصیت باشد که $\sigma.\alpha = \alpha$ این است که α طوری تعریف شده باشد که $\alpha_{t_1^1} = \cdots = \alpha_{t_{l_1}^1}$ و ... و $\alpha_{t_1^{c(\sigma)}} = \cdots = \alpha_{t_{l_{c(\sigma)}}^{c(\sigma)}}$.

پس در تعریف α با خاصیت ذکر شده، برای تعریف هر کدام از $\alpha_{t_1^1} = \cdots = \alpha_{t_{l_1}^1}$ و ... و $\alpha_{t_1^{c(\sigma)}} = \cdots = \alpha_{t_{l_{c(\sigma)}}^{c(\sigma)}}$، m انتخاب داریم و لذا برای α، $m^{c(\sigma)}$ انتخاب موجود است، یعنی $tr\ P(\sigma) = m^{c(\sigma)}$. $\square$

برهان دوم. فرض کنیم $B = \{e_i | 1 \leq i \leq m\}$ پایه‌ای برای V باشد، در نتیجه $B^{\otimes} = \{e_\alpha^{\otimes} | \alpha \in \Gamma_m^n\}$ پایه‌ای برای $\overset{n}{\otimes} V$ خواهد بود. توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} P(\sigma)(e_\alpha^{\otimes}) &= P(\sigma)(e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n}) \\ &= e_{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{\sigma^{-1}(n)}} \\ &= e_{\sigma.\alpha}^{\otimes}. \end{aligned}$$

تساوی‌های بالا نشان می‌دهند که درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $P(\sigma)$ نسبت به پایهٔ $B^{\otimes}$ برابر صفر و یا یک می‌باشند و یک فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $\sigma.\alpha = \alpha$. پس $tr\ P(\sigma)$ برابر است با تعداد $\alpha \in \Gamma_m^n$هایی که $\sigma.\alpha = \alpha$. فرض کنیم σ در تجزیهٔ به دورهای مجزا، با احتساب دورهای به‌طول یک، به $c(\sigma)$ دور تجزیه شده باشد:

$$\sigma = (t_1^1 \dots t_{l_1}^1) \cdots (t_1^{c(\sigma)} \dots t_{l_{c(\sigma)}}^{c(\sigma)}).$$

امّا شرط لازم و کافی برای اینکه $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ دارای این خاصیت باشد که $\sigma.\alpha = \alpha$ این است که α طوری تعریف شده باشد که $\alpha_{t_1^1} = \cdots = \alpha_{t_{l_1}^1}$ و ... و $\alpha_{t_1^{c(\sigma)}} = \cdots = \alpha_{t_{l_{c(\sigma)}}^{c(\sigma)}}$.

پس در تعریف α با خاصیت ذکر شده، برای تعریف هر کدام از $\alpha_{t_1^1} = \cdots = \alpha_{t_{l_1}^1}$ و ... و $\alpha_{t_1^{c(\sigma)}} = \cdots = \alpha_{t_{l_{c(\sigma)}}^{c(\sigma)}}$، m انتخاب داریم و لذا برای α، $m^{c(\sigma)}$ انتخاب موجود است، یعنی $tr\ P(\sigma) = m^{c(\sigma)}$. $\square$

قضیهٔ ۴.۱.۲ بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ، $\dim V_\chi^n(G)$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید که در آن $c(\sigma)$ تعداد دورهای موجود در تجزیهٔ دوری σ، با احتساب دورهای به‌طول یک است.

$$\dim V_\chi^n(G) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) m^{c(\sigma)}$$

برهان. قضیهٔ ۱۰.۱.۱ که خودتوان بودن عملگر خطی $T(G,\chi)$ را نشان می‌دهد، نتیجه می‌دهد که رتبه و اثر $T(G,\chi)$ برابر است و لذا بنابر لم ۳.۱.۲ می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}
\dim V_\chi^n(G) &= \dim Im\ T(G,\chi)\\
&= Rank\ T(G,\chi)\\
&= tr\ T(G,\chi)\\
&= tr\left(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)\right)\\
&= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma) tr\ P(\sigma)\\
&= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma) m^{c(\sigma)}. \ \square
\end{aligned}$$

مثال ۵.۱.۲ $G = \langle(12)\rangle$ را زیرگروهی از S_4 در نظر می‌گیریم و $\chi_0 = 1_G$ را سرشت اصلی از G. در این صورت بنابر قضیهٔ ۴.۱.۲

$$\dim V_{\chi_0}^4(G) = \frac{1}{2}(m^4 + m^3) = \frac{m^3(m+1)}{2}.$$

حال فرض کنیم $H = \langle(12)(34)\rangle$. H نیز زیرگروهی از S_4 می‌باشد و $\chi_0 = 1_H$ را سرشت اصلی از H در نظر می‌گیریم. قضیهٔ ۴.۱.۲ نشان می‌دهد که

$$\dim V_{\chi_0}^4(H) = \frac{1}{2}(m^4 + m^2) = \frac{m^2(m^2+1)}{2}.$$

فرمول‌های بعد مربوط به $V_{\chi_0}^4(G)$ و $V_{\chi_0}^4(H)$ نشان می‌دهند که $V_{\chi_0}^4(G)$ و $V_{\chi_0}^4(H)$ به‌عنوان $\mathbb{C}$ فضای برداری یکریخت نمی‌باشند. توجه می‌کنیم که G و H به‌عنوان زیرگروه‌های S_4 یکریخت هستند. انتظار طبیعی این بود که یکریخت بودن G و H به‌عنوان زیرگروه‌های S_4، یکریخت بودن $V_{\chi_0}^4(G)$ و $V_{\chi_0}^4(H)$ را به‌عنوان $\mathbb{C}$ فضای برداری نتیجه می‌داد، ولیکن چنین نشد و این ناهنجاری رفتار کلاس تقارن تانسوری را نشان می‌دهد.

مثال ۶.۱.۲ فرض کنیم π دوری به‌طول n در S_n باشد و قرار می‌دهیم $G = \langle \pi \rangle$ و $\chi = 1_G$. در این صورت به‌دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
\dim V_\chi^n(G) &= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) m^{c(\sigma)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} m^{c(\sigma)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} m^{c(\pi^j)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} m^{(n,j)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) m^d,
\end{aligned}
$$

که در آن φ تابع حسابی اویلر (تابع فیِ اویلر) می‌باشد و برای هر عدد طبیعی n، $\varphi(n)$ تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از یا مساوی با n که نسبت به n اوّل هستند تعریف می‌شود.

۲-۲ محاسبهٔ فرمول بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه دوری $G = \langle \pi_1 \ldots \pi_p \rangle$

فرض کنیم V فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد. مثال ۶.۱.۲ به‌همراه یک فرمول صریح بعد ازکلاس تقارن تانسوری وابسته به همان گروه و سرشتی تحویل‌ناپذیر و دیگر از آن موضوع مقالهٔ ۵ صفحه‌ای [3] را تشکیل داده‌اند. در [22] گروه $G = \langle \pi_1 \rangle \cdots \langle \pi_p \rangle$ به‌عنوان زیرگروهی از S_n در نظر گرفته شده است، که در آن π_i، $1 \leq i \leq p$، دوری به‌طول n_i در S_n می‌باشد و π_iها به‌عنوان دور، مجزا هستند و برای تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر از این گروه فرمول بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به این گروه و سرشت تحویل‌ناپذیر از آن به‌طور صریح محاسبه شده است و انجام این محاسبات نیز به مطالب پیشرفته از نظریهٔ اعداد مانند مطالب مربوط به‌مجموع رامانوجان محتاج شده است. واضح است که مقالهٔ [22] تعمیمی از مقالهٔ [3] می‌باشد وقتی که $p = 1$ فرض شود. در واقع به علت پیچیدگی محاسبهٔ فرمول بعد به‌طور صریح به‌ازای G و χ داده شده و ارتباط آن به مطالب مربوط به نظریهٔ اعداد، محاسبهٔ فرمول بعد به‌طور صریح، به یک مسأله پر هیجان تبدیل شده است. لذا در این بخش گروه $G = \langle \pi_1 \ldots \pi_p \rangle$ را در نظر می‌گیریم و قصد داریم فرمول صریح بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به این گروه و تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر آنرا محاسبه کنیم. در این محاسبات به مجموعی

برخورد می‌کنیم که تعمیمی از مجموع رامانوجان است. در زیر به بسط این مطالب که در [4] ظاهر شده‌اند می‌پردازیم.
مجموع رامانوجان را به‌صورت

$$C_n(h) = \sum_{\substack{t=0 \\ (t,n)=1}}^{n-1} \exp(\frac{2\pi iht}{n})$$

تعریف می‌کنیم که در آن n یک عدد صحیح مثبت است و h یک عدد صحیح نامنفی. رامانوجان ثابت کرده است که

$$C_n(h) = \frac{\varphi(n)\mu\left(\frac{n}{(n,h)}\right)}{\varphi\left(\frac{n}{(n,h)}\right)}$$

که در آن φ تابع فیِ اویلر است و در مثال ۶.۱.۲ آنرا شرح داده‌ایم و μ نیز تابع موبیوس است: $\mu(1) = 1$ و $\mu(n) = 0$ اگر عدد اوّل p موجود باشد که $p^2|n$ و $\mu(n) = (-1)^r$ اگر $n = p_1 \dots p_r$ که در آن p_1، ...، p_r اعداد اوّل متمایزند (نگاه کنید به [1]). اکنون مجموعی را که تعمیم مجموع رامانوجان است و آنرا مجموع رامانوجان تعمیم یافته نامیده‌ایم تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲ فرض کنیم n_1، ...، n_p اعداد صحیح مثبت باشند و h یک عدد صحیح نامنفی. گیریم $d_1|n_1$، ...، $d_p|n_p$. مجموع رامانوجان تعمیم یافته را که آنرا با $S(h; n_1, \dots, n_p; d_1, \dots, d_p)$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S(h; n_1, \dots, n_p; d_1, \dots, d_p) = \sum_{\substack{t=0 \\ (t,n_1)=d_1 \\ \vdots \\ (t,n_p)=d_p}}^{[n_1,\dots,n_p]-1} \exp\left(\frac{2\pi iht}{[n_1, \dots, n_p]}\right).$$

اگر مجموعهٔ $\{0 \leq t \leq [n_1, \dots, n_p] - 1 \mid (t, n_i) = d_i \ ; \ 1 \leq i \leq p\}$ تهی باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم $S(h; n_1, \dots, n_p; d_1, \dots, d_p) = 0$.

توجه می‌کنیم که $S(h; n; 1) = C_n(h)$ و لذا مجموع ظاهر شده در تعریف ۱.۲.۲ تعمیمی از مجموع رامانوجان است. در لم زیر مقدار مجموع رامانوجان تعمیم یافته را برحسب مجموع رامانوجان به‌دست می‌آوریم و لذا بنابر آنچه در بالا گفتیم، محاسبهٔ مجموع رامانوجان تعمیم یافته به محاسبهٔ مقدار تابع φ و μ در چند عدد تحویل خواهد شد.

لم ۲.۲.۲ فرض کنیم n_1، ...، n_p اعداد صحیح مثبت باشند و h یک عدد صحیح نامنفی. گیریم $d_1|n_1$، ...، $d_p|n_p$. قرار می‌دهیم $n'_i = n_i/d_i$، $N_i = n_1 \dots n_p/n_i$، $N'_i = n'_1 \dots n'_p/n'_i$ و $D_i = d_1 \dots d_p/d_i$ $(1 \leq i \leq p)$. اگر $l = \frac{(N_1,\dots,N_p)}{(N'_1,\dots,N'_p)(D_1,\dots,D_p)}$، که در آن $(a_1, \dots, a_p)$ بزرگترین مقسوم

علیه مشترک a_1، ...، a_p فرض می‌شود، آنگاه l یک عدد صحیح مثبت است و

$$S(h;n_1,\ldots,n_p;d_1,\ldots,d_p)=\begin{cases}\frac{1}{l}C_{[n'_1,\ldots,n'_p]}(hl) & : \left(\frac{[d_1,\ldots,d_p]}{d_i},n'_i\right)_{1\leq i\leq p}=1 \text{ اگر } \\ 0 & : \text{ در غیر این صورت}\end{cases}$$

برهان. اینکه l یک عدد صحیح مثبت است یک تمرین ساده از نظریهٔ مقدماتی اعداد می‌باشد. امّا بنابر تعریف ۱.۲.۲ و با توجه اینکه $\exp\left(\frac{2\pi iht}{[n_1,\ldots,n_p]}\right)$ تابعی متناوب از t با دورهٔ تناوب $[n_1,\ldots,n_p]$ است می‌توانیم بنویسیم

$$S(h;n_1,\ldots,n_p;d_1,\ldots,d_p)=\sum_{\substack{t=0\\(t,n_1)=d_1\\\vdots\\(t,n_p)=d_p}}^{[n_1,\ldots,n_p]-1}\exp\left(\frac{2\pi iht}{[n_1,\ldots,n_p]}\right)$$

$$=\frac{1}{l}\sum_{\substack{t=0\\(t,n_1)=d_1\\\vdots\\(t,n_p)=d_p}}^{l[n_1,\ldots,n_p]-1}\exp\left(\frac{2\pi iht}{[n_1,\ldots,n_p]}\right).$$

اکنون قرار می‌دهیم $t=[d_1,\ldots,d_p]t'$، و لذا به‌دست می‌آوریم

$$S(h;n_1,\ldots,n_p;d_1,\ldots,d_p)=\frac{1}{l}\sum_{\substack{t'=0\\([d_1,\ldots,d_p]t',n_1)=d_1\\\vdots\\([d_1,\ldots,d_p]t',n_p)=d_p}}^{[n'_1,\ldots,n'_p]-1}\exp\left(\frac{2\pi ihlt'}{[n'_1,\ldots,n'_p]}\right)$$

$$=\frac{1}{l}\sum_{\substack{t'=0\\(([d_1,\ldots,d_p]/d_1)t',n'_1)=1\\\vdots\\(([d_1,\ldots,d_p]/d_p)t',n'_p)=1}}^{[n'_1,\ldots,n'_p]-1}\exp\left(\frac{2\pi ihlt'}{[n'_1,\ldots,n'_p]}\right).$$

اگر برای هر i، $1\leq i\leq p$، $([d_1,\ldots,d_p]/d_i\,,n'_i)=1$ آنگاه مجموعهٔ تمام t'ها که در مجموع بالا تغییر می‌کند برابر است با مجموعهٔ تمام t'ها با این خاصیت که $0\leq t'\leq[n'_1,\ldots,n'_p]-1$ و $(t',n'_i)=1$، $1\leq i\leq p$. به‌علاوه

اگر i، $1 \leq i \leq p$، موجود باشد که $1 \neq ([d_1, \ldots, d_p]/d_i\, , n'_i)$ آنگاه مجموع بالا صفر است و لذا می‌توانیم بنویسیم

$$S(h; n_1, \ldots, n_p; d_1, \ldots, d_p) = \begin{cases} \dfrac{1}{l} \displaystyle\sum_{\substack{t'=0 \\ (t', n'_1)=1 \\ \vdots \\ (t', n'_p)=1}}^{[n'_1, \ldots, n'_p]-1} \exp\left(\frac{2\pi i h l t'}{[n'_1, \ldots, n'_p]}\right) & : \text{اگر } \left(\frac{[d_1, \ldots, d_p]}{d_i}, n'_i\right)_{1\leq i\leq p} = 1 \\ 0 & : \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{l} \displaystyle\sum_{\substack{t'=0 \\ (t', [n'_1, \ldots, n'_p])=1}}^{[n'_1, \ldots, n'_p]-1} \exp\left(\frac{2\pi i h l t'}{[n'_1, \ldots, n'_p]}\right) & : \text{اگر } \left(\frac{[d_1, \ldots, d_p]}{d_i}, n'_i\right)_{1\leq i\leq p} = 1 \\ 0 & : \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{l} C_{[n'_1, \ldots, n'_p]}(hl) & : \text{اگر } \left(\frac{[d_1, \ldots, d_p]}{d_i}, n'_i\right)_{1\leq i\leq p} = 1 \\ 0 & : \text{در غیر این صورت .} \end{cases} \quad \square$$

مثال‌های زیر حالات خاصی از مجموع رامانوجان تعمیم یافته می‌باشد.

مثال ۳.۲.۲ $S(0; n; d) = C_{n/d}(0) = \frac{\varphi(n/d)\mu\left(\frac{n/d}{(n/d,0)}\right)}{\varphi\left(\frac{n/d}{(n/d,0)}\right)} = \varphi(n/d).$

مثال ۴.۲.۲ اگر $(h, n) = 1$، آنگاه

$$S(h; n; d) = C_{n/d}(h) = \frac{\varphi(n/d)\mu\left(\frac{n/d}{(n/d,h)}\right)}{\varphi\left(\frac{n/d}{(n/d,h)}\right)} = \mu(n/d).$$

فرض کنیم $G = \langle \pi_1 \ldots \pi_p \rangle$ زیرگروهی دوری از $\mathbb{S}_n$ باشد که در آن π_i، $1 \leq i \leq p$، دوری به‌طول n_i در $\mathbb{S}_n$ است و π_iها به‌عنوان دور، مجزا هستند. بنابر تذکر ۱۹.۱.۰ و با توجه به اینکه G گروهی دوری از مرتبهٔ $[n_1, \ldots, n_p]$ می‌باشد، در می‌یابیم که G دارای $[n_1, \ldots, n_p]$ سرشت تحویل‌ناپذیر خطی می‌باشد که عبارتند از

$$\chi_h : G \to \mathbb{C}^*, \quad \chi_h\left((\pi_1 \ldots \pi_p)^t\right) = \exp\left(\frac{2\pi i h t}{[n_1, \ldots, n_p]}\right), \quad 0 \leq t \leq [n_1, \ldots, n_p] - 1,$$

و لذا

$$I(G)=\{\chi_h : G\to \mathbb{C}^* \mid 0\le h\le [n_1,\dots,n_p]-1\}.$$

قضیهٔ زیر فرمول بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ_h را به‌طور صریح مشخص می‌کند. این فرمول برحسب مجموع رامانوجان تعمیم یافته می‌باشد که بنابر لم ۲.۲.۲ به‌راحتی قابل محاسبه است.

قضیهٔ ۵.۲.۲ فرض کنیم V یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد. $G=\langle \pi_1\dots\pi_p\rangle$ را که در آن π_i، $1\le i\le p$، دوری به‌طول n_i است و π_iها به‌عنوان دور مجزا هستند به‌عنوان زیرگروهی از S_n در نظر می‌گیریم و برای هر h، $0\le h\le [n_1,\dots,n_p]-1$، χ_h را سرشتی تحویل‌ناپذیر از G می‌گیریم. در این صورت

$$\dim V^n_{\chi_h}(G)=\frac{m^{n-(n_1+\cdots+n_p)}}{[n_1,\dots,n_p]}\sum_{\substack{d_1|n_1\\ \vdots \\ d_p|n_p}} S(h;n_1,\dots,n_p;d_1,\dots,d_p)m^{d_1+\cdots+d_p}$$

که درآن $S(h;n_1,\dots,n_p;d_1,\dots,d_p)$ مجموع رامانوجان تعمیم یافته است.

برهان. بنابر قضیهٔ ۴.۱.۲ بعد $V^n_{\chi_h}(G)$ برابر است با

$$\frac{1}{[n_1,\dots,n_p]}\sum_{\sigma\in G}\chi_h(\sigma)m^{c(\sigma)}$$

که در آن $c(\sigma)$ برابر است با تعداد دورها در تجزیهٔ دوری σ، با احتساب دورهای به‌طول یک. ولی هر $\sigma\in G$ به‌صورت $\sigma=(\pi_1\dots\pi_p)^t$ که در آن $0\le t\le [n_1,\dots,n_p]-1$، قابل نمایش است. چون π_1، ...، π_p دورهای مجزا فرض شده‌اند لذا $(\pi_1\dots\pi_p)^t=\pi_1^t\dots\pi_p^t$. امّا به‌عنوان یک تمرین ساده از گروه‌های متقارن داریم

$$c(\pi_1^t\dots\pi_p^t)=c(\pi_1^t)+\cdots+c(\pi_p^t)+n-(n_1+\cdots+n_p),$$

و توجه می‌کنیم که اگر $d=(t,n_i)$، آنگاه π_i^t دارای d دور به‌طول n_i/d در تجزیهٔ دوری خود است و لذا $c(\pi_i^t)=d=(t,n_i)$. در نتیجه به‌دست می‌آوریم

$$c(\pi_1^t\dots\pi_p^t)=(t,n_1)+\cdots+(t,n_p)+n-(n_1+\cdots+n_p).$$

لذا بعد $V^n_{\chi_h}(G)$ به‌صورت زیر تحویل می‌شود:

$$\begin{aligned}\dim V^n_{\chi_h}(G) &= \frac{1}{[n_1,\dots,n_p]}\sum_{\sigma\in G}\chi_h(\sigma)m^{c(\sigma)}\\
&= \frac{1}{[n_1,\dots,n_p]}\sum_{t=0}^{[n_1,\dots,n_p]-1}\chi_h(\pi_1^t\dots\pi_p^t)m^{c(\pi_1^t\dots\pi_p^t)}\\
&= \frac{1}{[n_1,\dots,n_p]}\sum_{t=0}^{[n_1,\dots,n_p]-1}\exp\left(\frac{2\pi iht}{[n_1,\dots,n_p]}\right)m^{(t,n_1)+\dots+(t,n_p)+n-(n_1+\dots+n_p)}\\
&= \frac{m^{n-(n_1+\dots+n_p)}}{[n_1,\dots,n_p]}\sum_{t=0}^{[n_1,\dots,n_p]-1}\exp\left(\frac{2\pi iht}{[n_1,\dots,n_p]}\right)m^{(t,n_1)+\dots+(t,n_p)}.\end{aligned}$$

اکنون اگر قرار دهیم $(t,n_i)=d_i$، $1\le i\le p$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\dim V^n_{\chi_h}(G) &= \frac{m^{n-(n_1+\dots+n_p)}}{[n_1,\dots,n_p]}\sum_{\substack{d_1|n_1\\ \vdots\\ d_p|n_p}}\left(\sum_{\substack{t=0\\(t,n_1)=d_1\\ \vdots\\ (t,n_p)=d_p}}^{[n_1,\dots,n_p]-1}\exp\left(\frac{2\pi iht}{[n_1,\dots,n_p]}\right)\right)m^{d_1+\dots+d_p}\\
&= \frac{m^{n-(n_1+\dots+n_p)}}{[n_1,\dots,n_p]}\sum_{\substack{d_1|n_1\\ \vdots\\ d_p|n_p}}S(h;n_1,\dots,n_p;d_1,\dots,d_p)m^{d_1+\dots+d_p}\ .\ \square\end{aligned}$$

اکنون در حالات خاص، قضیهٔ ۵.۲.۲ قضیه‌های ۱ و ۲ از [3] را نتیجه می‌دهد. این حالات خاص را در زیر بیان کرده‌ایم. توجه می‌کنیم که یکی از این حالات خاص همان مثال ۶.۱.۲ می‌باشد.

نتیجهٔ ۶.۲.۲ فرض کنیم V یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد و G زیرگروهی دوری از S_n که توسط یک دور به‌طول n تولید می‌شود. اگر $\chi=1_G$ را سرشت اصلی از G در نظر بگیریم به‌دست می‌آوریم $\dim V^n_\chi(G)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(n/d)m^d$.

برهان. توجه می‌کنیم که $\chi=\chi_0$ و لذا بنابر مثال ۳.۲.۲ و قضیهٔ ۵.۲.۲ به‌دست می‌آوریم $\dim V^n_\chi(G)=\frac{m^{n-n}}{n}\sum_{d|n}S(0;n;d)m^d=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(n/d)m^d$. $\square$

تذکر ۷.۲.۲ در نتیجهٔ ۶.۲.۲، اگر $\dim V = m = ۱$، آنگاه $\dim \overset{n}{\otimes} V = ۱$ و لذا $\dim V_\chi^n(G) = ۰$ یا ۱. بنابراین ۱ یا $\frac{۱}{n}\sum_{d|n}\varphi(n/d) = ۰$. و لیکن $\frac{۱}{n}\sum_{d|n}\varphi(n/d) = ۰$ غیرممکن است و لذا $\frac{۱}{n}\sum_{d|n}\varphi(n/d) = ۱$ یا $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$ که نتیجه‌ای معروف از نظریهٔ اعداد است.

نتیجهٔ ۸.۲.۲ فرض کنیم V یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد و G زیرگروهی دوری از $\$_n$ که توسط یک دور به‌طول n تولید می‌شود. اگر χ را سرشت اوّلیه از G، $\chi = \chi_h$، $(h,n) = ۱$، در نظر بگیریم به دست می‌آوریم $\dim V_\chi^n(G) = \frac{۱}{n}\sum_{d|n}\mu(n/d)m^d$.

برهان. بنابر مثال ۴.۲.۲ و قضیهٔ ۵.۲.۲ به‌دست می‌آوریم $\dim V_\chi^n(G) = \frac{m^{n-n}}{n}\sum_{d|n}S(h;n;d)m^d = \frac{۱}{n}\sum_{d|n}\mu(n/d)m^d$. $\square$

مثال ۹.۲.۲ فرض کنیم V یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد و $G = \langle(۱۲)(۳۴)(۵۶۷۸)\rangle$ زیرگروهی از $\$_۹$. گیریم χ سرشت اصلی از G باشد، یعنی $\chi = \chi_۰$. در این صورت بنابر قضیهٔ ۵.۲.۲ به‌دست می‌آوریم

$$\dim V_\chi^۹(G) = \frac{m^{۹-(۲+۲+۴)}}{۴}\sum_{\substack{d_۱|۲\\ d_۲|۲\\ d_۳|۴}} S(۰;۲,۲,۴;d_۱,d_۲,d_۳)m^{d_۱+d_۲+d_۳}$$

$$= \frac{m}{۴}\left[S(۰;۲,۲,۴;۲,۲,۴)m^۸ + S(۰;۲,۲,۴;۲,۲,۲)m^۶ + S(۰;۲,۲,۴;۱,۱,۱)m^۳\right]$$

$$= \frac{m}{۴}[m^۸ + m^۶ + ۲m^۳].$$

۲-۳ محاسبهٔ فرمول بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه G وقتی G با نمایش کیلی در $\$_n$ می‌نشیند

فرض کنیم V یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد و G را گروهی متناهی در نظر می‌گیریم که روی مجموعهٔ n عضوی Ω به‌طور وفادار عمل می‌کند. لذا G زیرگروهی از $\$_n$ خواهد شد و کلاس تقارن تانسوری $V_\chi^n(G)$ برای هر $\chi \in I(G)$ با معنی خواهد شد. در این بخش می‌خواهیم در مورد بعد این کلاس تقارن تانسوری بحث کنیم و در حالت خاص چند نتیجهٔ مهم به‌دست خواهیم آورد. همگی این مطالب بخشی از [5] و [7] را تشکیل می‌دهند. در زیر به توضیح این مطالب می‌پردازیم.

گیریم گروه متناهی G روی مجموعهٔ n عضوی Ω به‌طور وفادار عمل می‌کند، لذا G زیرگروهی از S_n خواهد شد. در واقع $G = \{g | g \in G\} = \{\sigma_g | g \in G\}$ که در آن $\sigma_g : \Omega \to \Omega$ با تعریف $\sigma_g(\omega) = g.\omega$ برای هر $\omega \in \Omega$ جایگشتی روی n حرف می‌باشد. در نتیجه کلاس تقارن تانسوری $V_\chi^n(G)$ برای هر $\chi \in I(G)$ با معنی است. در اینجا θ را سرشت جایگشتی گروه G که به‌عنوان زیرگروهی از S_n در نظر گرفته شده است فرض می‌کنیم. یعنی برای هر $g \in G$، $\theta(g)$ برابر است با تعداد اعضایی از Ω که توسط g ثابت نگه داشته می‌شوند، و به عبارت دیگر تعداد دورهای به طول یک در تجزیهٔ دوری g. در زیر قضیه‌ای مطرح می‌کنیم که فرمول بعد ظاهر شده در قضیهٔ ۴.۱.۲ را برای این کلاس تقارن تانسوری برحسب θ به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱.۳.۲ فرض کنیم G گروهی متناهی باشد که روی مجموعهٔ n عضوی Ω به‌طور وفادار عمل می‌کند و V را یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای هر $\chi \in I(G)$،

$$\dim V_\chi^n(G) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) m^{(\theta\downarrow_{\langle g \rangle}, 1_{\langle g \rangle})_{\langle g \rangle}}.$$

برهان. فرض می‌کنیم $g = \sigma_g \in G$ دلخواه باشد. می‌دانیم $c(g)$ برابر است با تعداد دورها، با احتساب دورهای به‌طول یک، در تجزیهٔ دوری g. امّا بدیهی است که این تعداد برابر است با تعداد مدارهای Ω وقتی $\langle g \rangle$ روی Ω عمل می‌کند. با توجه به لم برنساید (نگاه کنید به [17]) تعداد مدارهای Ω وقتی $\langle g \rangle$ روی Ω عمل می‌کند برابر است با $\frac{1}{|\langle g \rangle|} \sum_{\sigma \in \langle g \rangle} \theta(\sigma)$ و در نتیجه $c(g) = (\theta \downarrow_{\langle g \rangle}, 1_{\langle g \rangle})_{\langle g \rangle}$. حال قضیهٔ ۴.۱.۲ حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

اکنون حالت خاص از عمل گروه G روی مجموعهٔ Ω را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم G گروهی n عضوی باشد که روی مجموعهٔ n عضوی $\Omega = G$ به‌طور منظم عمل می‌کند، یعنی برای هر $g \in G$ و $\omega \in \Omega$، $g.\omega = g\omega$. به‌وضوح این عمل وفادار است و لذا G زیرگروهی از S_n خواهد شد. در این حالت می‌گوییم G زیرگروهی از S_n توسط نمایش کیلی (یا نمایش منظم) است. در نتیجه مجدداً کلاس تقارن تانسوری $V_\chi^n(G)$ برای هر $\chi \in I(G)$ معنی خواهد داشت. قضیهٔ زیر فرمول صریحی برای بعد این کلاس تقارن تانسوری به‌دست می‌دهد که نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۱.۳.۲ است.

قضیهٔ ۲.۳.۲ فرض کنیم G گروهی n عضوی باشد که زیرگروهی از S_n توسط نمایش کیلی است. اگر V فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ فرض شود آنگاه برای هر $\chi \in I(G)$،

$$\dim V_\chi^n(G) = \frac{\chi(1)}{n} \sum_{g \in G} \chi(g) m^{n/o(g)}.$$

برهان. وقتی G را با نمایش کیلی زیرگروهی از S_n در نظر می‌گیریم، تمام اعضای G، به‌جز همانی، فاقد نقطهٔ ثابت هستند و لذا برای هر $g \neq 1$، $\theta(g) = 0$. در نتیجه

$$(\theta\downarrow_{\langle g\rangle}, 1_{\langle g\rangle})_{\langle g\rangle} = \frac{1}{|\langle g\rangle|}\sum_{\sigma\in\langle g\rangle}\theta(\sigma) = \frac{1}{o(g)}\sum_{k=0}^{o(g)-1}\theta(g^k) = \frac{n}{o(g)}$$

و لذا حکم از قضیهٔ ۱.۳.۲ نتیجه می‌شود. □

اکنون به کمک قضیهٔ ۲.۳.۲ می‌توانیم قضیهٔ زیر را به‌دست آوریم که رابطه‌ای معروف در نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی است و به کمک تکنیک‌های مقدماتی در این نظریه نمی‌توان به آن دست یافت.

قضیهٔ ۳.۳.۲ فرض کنیم G گروهی n عضوی باشد و χ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G. در این صورت برای هر عدد طبیعی m،

$$\chi(1)\sum_{g\in G}\chi(g)m^{n/o(g)} \overset{n}{\equiv} 0 \ .$$

برهان. G گروهی n عضوی است. می‌توانیم فرض کنیم G با نمایش کیلی در S_n نشانده شده است. برای هر عدد طبیعی m داده شده، V را فضای برداری روی $\mathbb{C}$ از بعد m در نظر می‌گیریم و لذا بنابر قضیهٔ ۲.۳.۲ به‌دست می‌آوریم

$$\dim V_\chi^n(G) = \frac{\chi(1)}{n}\sum_{g\in G}\chi(g)m^{n/o(g)}.$$

امّا $\dim V_\chi^n(G)$ عددی صحیح و نامنفی می‌باشد و لذا لزوماً

$$\chi(1)\sum_{g\in G}\chi(g)m^{n/o(g)} \overset{n}{\equiv} 0 \ . \ \square$$

اگر در قضیهٔ بالا χ را سرشت اصلی G فرض کنیم، یعنی $\chi = 1_G$، نتیجهٔ زیر را به‌دست خواهیم آورد.

نتیجهٔ ۴.۳.۲ فرض کنیم G گروهی n عضوی باشد. در این صورت برای هر عدد طبیعی m،

$$\sum_{g\in G} m^{n/o(g)} \overset{n}{\equiv} 0 \ .$$

توجه می‌کنیم که نتیجهٔ ۴.۳.۲ را می‌توانیم تعمیم قضیهٔ کوچک فرما برای گروه‌های متناهی در نظر بگیریم. برهان نتیجه زیر این موضوع را روشن می‌کند.

نتیجهٔ ۵.۳.۲ (قضیهٔ کوچک فرما). برای هر عدد طبیعی m و هر عدد اوّل p، $m^p \overset{p}{\equiv} m$.

برهان. فرض کنیم G گروه دوری از مرتبهٔ p باشد. در این صورت برای هر $g \neq 1$، $o(g) = p$ و لذا

$$\sum_{g\in G} m^{p/o(g)} = m^{p/o(1)} + \sum_{1\neq g\in G} m^{p/o(g)} = m^{p/1} + \sum_{1\neq g\in G} m = m^p + (p-1)m.$$

اکنون به کمک نتیجهٔ ۴.۳.۲ به‌دست می‌آوریم $m^p + (p-1)m \overset{p}{\equiv} 0$ یا $m^p \overset{p}{\equiv} m$. □

در مقالهٔ [10] فرمول‌های بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه دو وجهی ارائه شده است. در اینجا گروه دو دوری را در نظر می‌گیریم و فرمول‌های بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به این گروه را مشخص خواهیم کرد. این مطالب در بخشی از [5] ظاهر شده‌اند. در زیر ابتدا گروه دو دوری T_{4n} و سرشتهای تحویل‌ناپذیر آنرا معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶.۳.۲ برای $n \geq 1$، گروه دو دوری از درجهٔ n که آنرا با T_{4n} نمایش می‌دهیم را به‌صورت

$$T_{4n} = \langle r, s \mid r^{2n} = 1,\ \ r^n = s^2,\ \ s^{-1}rs = r^{-1}\rangle$$

تعریف می‌کنیم.

به‌راحتی دیده می‌شود که گروه دو دوری T_{4n}، گروهی از مرتبهٔ $4n$ است. در [2] این گروه با $\langle 2,2,n\rangle$ نمایش داده شده است و ثابت شده است که $T_{4n} = \langle r,s \mid r^n = s^2 = (rs)^2\rangle$. در هر صورت داریم: $T_{4n} = \{r^l, r^l s \mid 0 \leq l < 2n\}$. بنابر [12] این گروه دارای $n+3$ کلاس تزویج است که عبارتند از

$$\{1\},\ \{r^n\},\ \{r^k, r^{2n-k}\},\ 1\leq k\leq n-1,\ \{r^{2k}s \mid 0\leq k\leq n-1\}, \{r^{2k+1}s \mid 0\leq k\leq n-1\}.$$

در [12] جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر T_{4n} به‌صورت زیر ارائه شده است:

جدول I. جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه T_{4n} وقتی n فرد است.

$\lvert C_{T_{4n}}(g)\rvert$	$4n$	$4n$	$2n$	4	4
g	1	r^n	$r^k(1\leq k\leq n-1)$	s	rs
ψ_1	1	1	1	1	1
ψ_2	1	-1	$(-1)^k$	i	$-i$
ψ_3	1	1	1	-1	-1
ψ_4	1	-1	$(-1)^k$	$-i$	i
χ_h	2	$2(-1)^h$	$2\cos\frac{kh\pi}{n}$	0	0
$(1\leq h\leq n-1)$					

جدول II. جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه $T_{۴n}$ وقتی n زوج است.

$\lvert C_{T_{۴n}}(g)\rvert$	$۴n$	$۴n$	$۲n$	۴	۴
g	۱	r^n	$r^k(۱ \leq k \leq n-۱)$	s	rs
$\phi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\phi_۲$	۱	۱	$(-۱)^k$	۱	-۱
$\phi_۳$	۱	۱	۱	-۱	-۱
$\phi_۴$	۱	۱	$(-۱)^k$	-۱	۱
χ_h $(۱ \leq h \leq n-۱)$	۲	$۲(-۱)^h$	$۲\cos\frac{kh\pi}{n}$	$\circ$	$\circ$

بنابر جدول‌های بالا، گروه $T_{۴n}$ دارای ۴ سرشت تحویل‌ناپذیر خطی $\psi_۱$، $\psi_۲$، $\psi_۳$ و $\psi_۴$ وقتی n فرد فرض می‌شود و ۴ سرشت تحویل‌ناپذیر خطی $\phi_۱$، $\phi_۲$، $\phi_۳$ و $\phi_۴$ وقتی n زوج فرض می‌شود می‌باشد. همچنین این گروه دارای $n-۱$ سرشت تحویل‌ناپذیر χ_h، $۱ \leq h \leq n-۱$، از درجهٔ ۲ می‌باشد. اکنون V را یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم گروه دو دوری $G = T_{۴n}$ توسط نمایش کیلی زیرگروهی از $\$_{۴n}$ باشد. در این صورت برای هر $\chi \in I(G)$ کلاس تقارن تانسوری $V_\chi^{۴n}(G)$ معنی دارد و دو قضیه زیر بعد این کلاس‌های تقارن تانسوری را مشخص می‌کند. در دو قضیهٔ زیر $(۲n, k)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک $۲n$ و k را نمایش می‌دهد.

قضیهٔ ۷.۳.۲ فرض کنیم $G = T_{۴n}$، n فرد، و V را فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. اگر G توسط نمایش کیلی زیرگروهی از $\$_{۴n}$ باشد، آنگاه فرمول‌های بعد زیر برقرار هستند.

$$\dim V_{\psi_۱}^{۴n}(G) = \frac{۱}{۴n}\left[m^{۴n} + m^{۲n} + ۲\sum_{k=۱}^{n-۱} m^{۲(۲n,k)} + ۲nm^n\right],$$
$$\dim V_{\psi_۲}^{۴n}(G) = \frac{۱}{۴n}\left[m^{۴n} - m^{۲n} + ۲\sum_{k=۱}^{n-۱}(-۱)^k m^{۲(۲n,k)}\right],$$
$$\dim V_{\psi_۳}^{۴n}(G) = \frac{۱}{۴n}\left[m^{۴n} + m^{۲n} + ۲\sum_{k=۱}^{n-۱} m^{۲(۲n,k)} - ۲nm^n\right],$$
$$\dim V_{\psi_۴}^{۴n}(G) = \frac{۱}{۴n}\left[m^{۴n} - m^{۲n} + ۲\sum_{k=۱}^{n-۱}(-۱)^k m^{۲(۲n,k)}\right],$$
$$\dim V_{\chi_h}^{۴n}(G) = \frac{۱}{۲n}\left[۲m^{۴n} + ۲(-۱)^h m^{۲n} + ۴\sum_{k=۱}^{n-۱}\cos\frac{kh\pi}{n} m^{۲(۲n,k)}\right], ۱ \leq h \leq n-۱.$$

برهان. گروه $G=T_{4n}$ توسط نمایش کیلی زیرگروهی از S_{4n} می‌باشد و نمایش جایگشتی مولدهای G، r و s، به‌راحتی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} r &= (1\ \ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ 2n)(2n+1\ \ 2n+2\ \ 2n+3\ \ \ldots\ \ 4n), \\ s &= (1\ \ 2n+1\ \ n+1\ \ 3n+1)(2\ \ 4n\ \ n+2\ \ 3n)(3\ \ 4n-1\ \ n+3\ \ 3n-1)\ldots \\ &\quad (n-1\ \ 3n+3\ \ 2n-1\ \ 2n+3)(n\ \ 3n+2\ \ 2n\ \ 2n+2). \end{aligned}$$

اکنون توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} rs &= (1\ \ 2n+2\ \ n+1\ \ 3n+2)(2\ \ 2n+1\ \ n+2\ \ 3n+1)(3\ \ 4n\ \ n+3\ \ 3n)\ldots \\ &\quad (n\ \ 3n+3\ \ 2n\ \ 2n+3), \end{aligned}$$

و لذا به‌دست می‌آوریم: $o(1)=1$، $o(r^n)=2$، $o(r^k)=\frac{2n}{(2n,k)}$، $1\le k\le n-1$، $o(s)=4$ و $o(rs)=4$.
حال قضیهٔ ۲.۳.۲ و جدول I حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

قضیهٔ ۸.۳.۲ فرض کنیم $G=T_{4n}$، n زوج، و V را فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. اگر G توسط نمایش کیلی زیرگروهی از S_{4n} باشد، آنگاه فرمول‌های بعد زیر برقرار هستند.

$$\begin{aligned} \dim V_{\phi_1}^{4n}(G) &= \frac{1}{4n}\left[m^{4n}+m^{2n}+2\sum_{k=1}^{n-1}m^{2(2n,k)}+2nm^n\right], \\ \dim V_{\phi_2}^{4n}(G) &= \frac{1}{4n}\left[m^{4n}+m^{2n}+2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k m^{2(2n,k)}\right], \\ \dim V_{\phi_3}^{4n}(G) &= \frac{1}{4n}\left[m^{4n}+m^{2n}+2\sum_{k=1}^{n-1}m^{2(2n,k)}-2nm^n\right], \\ \dim V_{\phi_4}^{4n}(G) &= \frac{1}{4n}\left[m^{4n}+m^{2n}+2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k m^{2(2n,k)}\right], \\ \dim V_{\chi_h}^{4n}(G) &= \frac{1}{2n}\left[2m^{4n}+2(-1)^h m^{2n}+4\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{kh\pi}{n}m^{2(2n,k)}\right],\ 1\le h\le n-1. \end{aligned}$$

برهان. حکم مشابه برهان قضیهٔ ۷.۳.۲، به کمک قضیهٔ ۲.۳.۲ و جدول II نتیجه می‌شود. $\square$

۲-۴ محاسبهٔ فرمول بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه $G=PSL_2(q)$

در این بخش گروه تصویری خطی خاص از درجهٔ ۲ روی میدان q عضوی، $PSL_2(q)$، را در نظر می‌گیریم و بعد مربوط به کلاس تقارن تانسوری وابسته به این گروه را به‌ازای تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر آن محاسبه می‌کنیم. این مطالب در

بخشی از [6] ظاهر شده‌اند. در زیر ابتدا به معرفی گروه $PSL_۲(q)$ می‌پردازیم و سپس مطالب مذکور در بالا را شرح می‌دهیم. در سراسر این بخش V فضای برداری s بعدی روی $\mathbb{C}$ است.

گروه خطی خاص از درجهٔ ۲ روی میدان q عضوی را که با $SL_۲(q)$ نمایش می‌دهیم گروه ضربی ماتریس‌های وارونپذیر ۲ × ۲ با درایه‌هایی از میدان q عضوی تعریف می‌کنیم (توجه می‌کنیم که در اینجا $q = p^n$ که در آن p عددی اوّل است و n عددی صحیح و نامنفی می‌باشد). جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر این گروه در حالتی که $p =$ ۲ و یا p عددی اوّل و فرد باشد در [8] محاسبه شده است. گروه $SL_۲(q)$ روی مجموعه‌ای متشکل از $q+$ ۱ حرف که به خط تصویری معروف است عمل می‌کند و به‌راحتی دیده می‌شود که هستهٔ عمل برابر است با $\{-I, I\}$ که در آن I ماتریس ۲ × ۲ همانی می‌باشد. در نتیجه $SL_۲(q)/\{-I, I\}$ گروهی خارج قسمتی است که روی خط تصویری به‌طور وفادار عمل می‌کند و لذا زیرگروهی از $_{q+۱}$\$ می‌باشد. این گروه را با $PSL_۲(q)$ نمایش می‌دهیم و آنرا گروه تصویری خطی خاص از درجهٔ ۲ روی میدان q عضوی می‌نامیم. با توجه به اینکه $PSL_۲(q)$ خارج قسمتی از $SL_۲(q)$ می‌باشد، لذا با توجه به قضیهٔ ۲۰.۱.۰ و به کمک جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر $SL_۲(q)$ که در [8] ظاهر شده است، جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر $PSL_۲(q)$ به‌دست می‌آیند:

جدول I. جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر $G = PSL_۲(q)$، q فرد، $q = p^n$، $q \overset{۴}{\equiv} ۱$، $|G| = \frac{۱}{۲}q(q^۲ - ۱)$.

g	$\{-I,I\}۱$	$\{-I,I\}c$	$\{-I,I\}d$	$\{-I,I\}a^l$	$\{-I,I\}a^{(q-۱)/۴}$	$\{-I,I\}b^m$
$\|(g)\|$	۱	$\frac{۱}{۲}(q^۲-۱)$	$\frac{۱}{۲}(q^۲-۱)$	$q(q+۱)$	$\frac{۱}{۲}q(q+۱)$	$q(q-۱)$
$o(g)$	۱	p	p	$\frac{(q-۱)/۲}{(l,(q-۱)/۲)}$	۲	$\frac{(q+۱)/۲}{(m,(q+۱)/۲)}$
۱_G	۱	۱	۱	۱	۱	۱
ψ	q	۰	۰	۱	۱	-۱
χ_i	$q+۱$	۱	۱	$\rho^{il}+\rho^{-il}$	$\rho^{i(q-۱)/۴}+\rho^{-i(q-۱)/۴}$	۰
θ_j	$q-۱$	-۱	-۱	۰	۰	$-(\sigma^{jm}+\sigma^{-jm})$
$\xi_۱$	$\frac{۱}{۲}(q+۱)$	$\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{q})$	$\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt{q})$	$(-۱)^l$	$(-۱)^{(q-۱)/۴}$	۰
$\xi_۲$	$\frac{۱}{۲}(q+۱)$	$\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt{q})$	$\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{q})$	$(-۱)^l$	$(-۱)^{(q-۱)/۴}$	۰

$i = ۲,۴,۶,\ldots,(q-۵)/۲ \quad , \quad l = ۱,۲,\ldots,(q-۵)/۴ \quad , \quad \rho = e^{۲\pi\sqrt{-۱}/q-۱}$

$j = ۲,۴,۶,\ldots,(q-۱)/۲ \quad , \quad m = ۱,۲,\ldots,(q-۱)/۴ \quad , \quad \sigma = e^{۲\pi\sqrt{-۱}/q+۱}$

$|I(G)| = ۴ + \frac{q-۵}{۴} + \frac{q-۱}{۴} = \frac{q+۵}{۲}$

جدول II. جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر $G = PSL_۲(q)$، q فرد، $q = p^n$، $q \overset{۴}{\equiv} ۳$، $|G| = \frac{۱}{۲}q(q^۲ - ۱)$.

g	$\{-I,I\}۱$	$\{-I,I\}c$	$\{-I,I\}d$	$\{-I,I\}a^l$	$\{-I,I\}b^m$	$\{-I,I\}b^{(q+۱)/۴}$
$\|(g)\|$	۱	$\frac{۱}{۲}(q^۲-۱)$	$\frac{۱}{۲}(q^۲-۱)$	$q(q+۱)$	$q(q-۱)$	$\frac{۱}{۲}q(q-۱)$
$o(g)$	۱	p	p	$\frac{(q-۱)/۲}{(l,(q-۱)/۲)}$	$\frac{(q+۱)/۲}{(m,(q+۱)/۲)}$	۲
۱_G	۱	۱	۱	۱	۱	۱
ψ	q	۰	۰	۱	-۱	-۱
χ_i	$q+۱$	۱	۱	$\rho^{il}+\rho^{-il}$	۰	۰
θ_j	$q-۱$	-۱	-۱	۰	$-(\sigma^{jm}+\sigma^{-jm})$	$-(\sigma^{j(q+۱)/۴}+\sigma^{-j(q+۱)/۴})$
$\eta_۱$	$\frac{۱}{۲}(q-۱)$	$-\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt{-q})$	$-\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{-q})$	۰	$(-۱)^{m+۱}$	$(-۱)^{(q+۵)/۴}$
$\eta_۲$	$\frac{۱}{۲}(q-۱)$	$-\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{-q})$	$-\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt{-q})$	۰	$(-۱)^{m+۱}$	$(-۱)^{(q+۵)/۴}$

$i = ۲,۴,۶,\ldots,(q-۳)/۲ \quad , \quad l = ۱,۲,۳,\ldots,(q-۳)/۴ \quad , \quad \rho = e^{۲\pi\sqrt{-۱}/q-۱}$

$j = ۲,۴,۶,\ldots,(q-۳)/۲ \quad , \quad m = ۱,۲,۳,\ldots,(q-۳)/۴ \quad , \quad \sigma = e^{۲\pi\sqrt{-۱}/q+۱}$

$|I(G)| = ۴ + \frac{q-۳}{۴} + \frac{q-۳}{۴} = \frac{q+۵}{۲}$

جدول III. جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر $G = PSL_2(q)$، q زوج، $q = 2^n$، $|G| = q(q^2 - 1)$.

g	$\{I\}1$	$\{I\}c$	$\{I\}a^l$	$\{I\}b^m$
$\lvert(g)\rvert$	1	$q^2 - 1$	$q(q+1)$	$q(q-1)$
$o(g)$	1	2	$\frac{q-1}{(l,q-1)}$	$\frac{q+1}{(m,q+1)}$
1_G	1	1	1	1
ψ	q	0	1	-1
χ_i	$q+1$	1	$\rho^{il} + \rho^{-il}$	0
θ_j	$q-1$	-1	0	$-(\sigma^{jm} + \sigma^{-jm})$

$1 \leq i \leq (q-2)/2\ ,\ \ 1 \leq l \leq (q-2)/2\ ,\ \ \rho = e^{2\pi\sqrt{-1}/q-1}$

$1 \leq j \leq q/2\ ,\qquad 1 \leq m \leq q/2\ ,\qquad \sigma = e^{2\pi\sqrt{-1}/q+1}$

$|I(G)| = 2 + \frac{q-2}{2} + \frac{q}{2} = q + 1$

همانطور که در بالا اشاره کردیم گروه $G = PSL_2(q)$ روی خط تصویری که $q+1$ عضو دارد عملی وفادار (و حتی ۲ـانتقالی) دارد و لذا می‌توانیم $PSL_2(q)$ را زیرگروهی از $\$_{q+1}$ در نظر بگیریم. در نتیجه $V_\chi^{q+1}(G)$ برای هر $\chi \in I(G)$ معنی دارد و در اینجا می‌خواهیم بعد این کلاس‌های تقارن تانسوری را به‌ازای تمام χهایی که در جدول‌های I، II و III ظاهر شده‌اند به‌دست آوریم و برای این منظور، بنابر قضیهٔ ۴.۱.۲ کافی است که ساختار دوری تمام اعضای $G = PSL_2(q)$ را شناسایی کنیم. پس اکنون هدفمان این است که ساختار دوری تمام اعضای $G = PSL_2(q)$ را به‌عنوان زیرگروهی از $\$_{q+1}$ به‌دست آوریم. امّا با توجه به اینکه تمام اعضای یک کلاس تزویج از G ساختار دوری یکسان دارند، لذا کافی است ساختار دوری نمایندهٔ کلاس‌های تزویج مجزای G را به‌دست آوریم. این نماینده‌ها در جدول‌های I، II و III ظاهر شده‌اند.

برای هر $g \in G$، قرار می‌دهیم $\mathrm{fix}(g) = \{i \mid 1 \leq i \leq q+1,\ g(i) = i\}$. در این صورت θ که به‌صورت $\theta(g) = |\mathrm{fix}(g)|$، $g \in G$، تعریف می‌شود سرشت جایگشتی G حاصل از عمل آن روی نقاط خط تصویری است. از آنجایی که عمل G روی نقاط خط تصویری ۲ـانتقالی است، لذا $\nu : G \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\nu(g) = |\mathrm{fix}(g)| - 1$، $g \in G$، سرشتی تحویل‌ناپذیر از G خواهد بود. در حالت $G = PSL_2(q)$، q فرد، $q \overset{4}{\equiv} 1$، ν لزوماً باید با یکی از سرشتهای تحویل‌ناپذیر G که در جدول I ظاهر شده‌اند برابر باشد. امّا از آنجایی که $\nu(\{-I, I\}1) = (q+1) - 1 = q$، ν لزوماً با ψ برابر است و در نتیجه $|\mathrm{fix}(g)| = 1 + \psi(g)$، $g \in G$. بدین شکل سطر $|\mathrm{fix}(g)|$ در جدول IV که در زیر می‌آید به‌دست می‌آید. در دو حالت دیگر برای q نیز سطر $|\mathrm{fix}(g)|$ در جدول‌های V و VI که در زیر می‌آیند به‌دست خواهد آمد.

اکنون به کمک [8] شکل ماتریسی اعضای a، b، c و d که در جدول‌های IV، V و VI (جدول‌های زیر) ظاهر شده‌اند را در نظر می‌گیریم. در حالت $G = PSL_۲(q)$، q فرد، $q \overset{۴}{\equiv} ۱$، اگر عضوی مانند x دارای مرتبه r باشد که r عددی اوّل است آنگاه تمام دورهای غیربدیهی که در تجزیهٔ دوری x ظاهر می‌شوند دارای طول r می‌باشند و لذا در مورد اعضای $\{-I,I\}c$، $\{-I,I\}d$ و $\{-I,I\}a^{(q-۱)/۴}$ که به ترتیب دارای مرتبه‌های p، p و ۲ می‌باشند ساختار دوری به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه $\{-I,I\}a$ دارای دو نقطه ثابت و دو دور به‌طول $(q-۱)/۴$ است لذا ساختار دوری این عضو و در نهایت ساختار دوری توانهای $\{-I,I\}a$ به‌دست می‌آیند. عضو $\{-I,I\}b$ نیز دور سینگر[2] نام دارد و در تجزیهٔ دوری فقط از یک دور تشکیل می‌شود و به‌وضوح ساختار دوری توانهای آن نیز به‌دست می‌آید. در دو حالت دیگر برای q نیز، به‌طور مشابه می‌توانیم ساختار دوری نمایندهٔ کلاس‌های تزویج G را به‌دست آوریم. تمام این مطالب در جدول‌های IV، V و VI خلاصه شده‌اند:

جدول IV. ساختار دوری اعضای گروه $G = PSL_۲(q) \leq S_{q+۱}$، q فرد، $q = p^n$، $q \overset{۴}{\equiv} ۱$، $|G| = \frac{۱}{۲}q(q^۲-۱)$.

g	$\{-I,I\}۱$	$\{-I,I\}c$	$\{-I,I\}d$	$\{-I,I\}a^l$	$\{-I,I\}a^{(q-۱)/۴}$	$\{-I,I\}b^m$
$\lvert(g)\rvert$	۱	$\frac{۱}{۲}(q^۲-۱)$	$\frac{۱}{۲}(q^۲-۱)$	$q(q+۱)$	$\frac{۱}{۲}q(q+۱)$	$q(q-۱)$
$o(g)$	۱	p	p	$\frac{(q-۱)/۲}{(l,(q-۱)/۲)}$	۲	$\frac{(q+۱)/۲}{(m,(q+۱)/۲)}$
$\lvert\mathrm{fix}(g)\rvert$	$q+۱$	۱	۱	۲	۲	۰
ساختار دوری g	$۱^{q+۱}$	$۱^۱p^{p^{n-۱}}$	$۱^۱p^{p^{n-۱}}$	$۱^۲\,{\frac{(q-۱)/۲}{(l,(q-۱)/۲)}}^{۲(l,(q-۱)/۲)}$	$۱^۲۲^{(q-۱)/۲}$	${\frac{(q+۱)/۲}{(m,(q+۱)/۲)}}^{۲(m,(q+۱)/۲)}$

$۱ \leq l \leq (q-۵)/۴$

$۱ \leq m \leq (q-۱)/۴$

جدول V. ساختار دوری اعضای گروه $G = PSL_۲(q) \leq S_{q+۱}$، q فرد، $q = p^n$، $q \overset{۴}{\equiv} ۳$، $|G| = \frac{۱}{۲}q(q^۲-۱)$.

g	$\{-I,I\}۱$	$\{-I,I\}c$	$\{-I,I\}d$	$\{-I,I\}a^l$	$\{-I,I\}b^m$	$\{-I,I\}b^{(q+۱)/۴}$
$\lvert(g)\rvert$	۱	$\frac{۱}{۲}(q^۲-۱)$	$\frac{۱}{۲}(q^۲-۱)$	$q(q+۱)$	$q(q-۱)$	$\frac{۱}{۲}q(q-۱)$
$o(g)$	۱	p	p	$\frac{(q-۱)/۲}{(l,(q-۱)/۲)}$	$\frac{(q+۱)/۲}{(m,(q+۱)/۲)}$	۲
$\lvert\mathrm{fix}(g)\rvert$	$q+۱$	۱	۱	۲	۰	۰
ساختار دوری g	$۱^{q+۱}$	$۱^۱p^{p^{n-۱}}$	$۱^۱p^{p^{n-۱}}$	$۱^۲\,{\frac{(q-۱)/۲}{(l,(q-۱)/۲)}}^{۲(l,(q-۱)/۲)}$	${\frac{(q+۱)/۲}{(m,(q+۱)/۲)}}^{۲(m,(q+۱)/۲)}$	$۲^{(q+۱)/۲}$

$۱ \leq l \leq (q-۳)/۴$

$۱ \leq m \leq (q-۳)/۴$

2) Singer cycle

جدول VI. ساختار دوری اعضای گروه $G = PSL_۲(q) \le \$_{q+۱}$، q زوج، $q = ۲^n$، $|G| = q(q^۲ - ۱)$.

g	$\{I\}۱$	$\{I\}c$	$\{I\}a^l$	$\{I\}b^m$
$\|(g)\|$	۱	$q^۲ - ۱$	$q(q+۱)$	$q(q-۱)$
$o(g)$	۱	۲	$\frac{q-۱}{(l,q-۱)}$	$\frac{q+۱}{(m,q+۱)}$
$\|\mathrm{fix}(g)\|$	$q+۱$	۱	۲	۰
ساختار دوری g	$۱^{q+۱}$	$۱^۱ ۲^{q/۲}$	$۱^۲ \frac{q-۱}{(l,q-۱)}^{(l,q-۱)}$	$\frac{q+۱}{(m,q+۱)}^{(m,q+۱)}$

$۱ \le l \le (q-۲)/۲$

$۱ \le m \le q/۲$

اکنون می‌توانیم فرمول‌های بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه $G = PSL_۲(q)$ و تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر آنرا محاسبه کنیم. این فرمول‌ها در سه قضیهٔ زیر ظاهر شده‌اند. در این قضایا (a,b) بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b را نمایش می‌دهد و ρ و σ به‌ترتیب ریشه‌های اوّلیه $(q-۱)$ام و $(q+۱)$ام واحد در $\mathbb{C}$ هستند.

قضیهٔ ۱.۴.۲ فرض کنیم $G = PSL_۲(q)$ زیرگروهی از $\$_{q+۱}$ باشد، q فرد، $q = p^n$، $q \overset{۴}{\equiv} ۱$ و V را فضای برداری s بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای $\chi \in I(G)$ فرمول‌های زیر برای بعد $V_\chi^{q+۱}(G)$ برقرارند.

$$\dim V_{۱_G}^{q+۱}(G) = \frac{۲}{q(q^۲-۱)}\Bigg[s^{q+۱} + (q^۲-۱)s^{۱+p^{n-۱}} + q(q+۱)\sum_{l=۱}^{(q-۵)/۴} s^{۲+۲(l,(q-۱)/۲)} + \frac{۱}{۲}q(q+۱)s^{(q+۳)/۲} + q(q-۱)\sum_{m=۱}^{(q-۱)/۴} s^{۲(m,(q+۱)/۲)}\Bigg],$$

$$\dim V_{\psi}^{q+۱}(G) = \frac{۲}{q^۲-۱}\Bigg[qs^{q+۱} + q(q+۱)\sum_{l=۱}^{(q-۵)/۴} s^{۲+۲(l,(q-۱)/۲)} + \frac{۱}{۲}q(q+۱)s^{(q+۳)/۲} - q(q-۱)\sum_{m=۱}^{(q-۱)/۴} s^{۲(m,(q+۱)/۲)}\Bigg],$$

$$\dim V_{\chi_i}^{q+1}(G)=\frac{2}{q(q-1)}\Bigg[(q+1)s^{q+1}+(q^2-1)s^{1+p^{n-1}}+q(q+1)\sum_{l=1}^{(q-5)/4}(\rho^{il}+\rho^{-il})s^{2+2(l,(q-1)/2)}$$
$$+\frac{1}{2}q(q+1)(\rho^{i(q-1)/4}+\rho^{-i(q-1)/4})s^{(q+3)/2}\Bigg],$$
$$i=2,4,6,\dots,(q-5)/2$$

$$\dim V_{\theta_j}^{q+1}(G)=\frac{2}{q(q+1)}\Bigg[(q-1)s^{q+1}-(q^2-1)s^{1+p^{n-1}}-q(q-1)\sum_{m=1}^{(q-1)/4}(\sigma^{jm}+\sigma^{-jm})s^{2(m,(q+1)/2)}\Bigg],$$
$$j=2,4,6,\dots,(q-1)/2$$

$$\dim V_{\xi_1}^{q+1}(G)=\frac{1}{q(q-1)}\Bigg[\frac{1}{2}(q+1)s^{q+1}+\frac{1}{2}(q^2-1)s^{1+p^{n-1}}+q(q+1)\sum_{l=1}^{(q-5)/4}(-1)^l s^{2+2(l,(q-1)/2)}$$
$$+(-1)^{(q-1)/4}\frac{1}{2}q(q+1)s^{(q+3)/2}\Bigg],$$

$$\dim V_{\xi_2}^{q+1}(G)=\frac{1}{q(q-1)}\Bigg[\frac{1}{2}(q+1)s^{q+1}+\frac{1}{2}(q^2-1)s^{1+p^{n-1}}+q(q+1)\sum_{l=1}^{(q-5)/4}(-1)^l s^{2+2(l,(q-1)/2)}$$
$$+(-1)^{(q-1)/4}\frac{1}{2}q(q+1)s^{(q+3)/2}\Bigg].$$

برهان. واضح است که اگر π دوری به طول a باشد و $d=(a,k)$ آنگاه π^k دارای d دور به طول a/d است و لذا $c(\pi^k)=d=(a,k)$. اکنون ساختار دوری اعضای $G=PSL_2(q)$ وقتی زیرگروهی از $\$_{q+1}$ است در جدول IV موجود است و به کمک این جدول و جدول I و قضیهٔ ۴.۱.۲ حکم به‌دست می‌آید. □

در دو حالت دیگر برای q قضیه‌های زیر را به‌دست می‌آوریم که برهانی مشابه برهان قضیهٔ ۱.۴.۲ دارند.

قضیهٔ ۲.۴.۲ فرض کنیم $G=PSL_2(q)$ زیرگروهی از $\$_{q+1}$ باشد، q فرد، $q=p^n$، $q\overset{4}{\equiv}3$ و V را فضای برداری s بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای $\chi\in I(G)$ فرمول‌های زیر برای بعد $V_\chi^{q+1}(G)$ برقرارند.

$$\dim V_{1_G}^{q+1}(G) = \frac{2}{q(q^2-1)}\Bigg[s^{q+1} + (q^2-1)s^{1+p^{n-1}} + q(q+1)\sum_{l=1}^{(q-3)/4} s^{2+2(l,(q-1)/2)} + q(q-1)\sum_{m=1}^{(q-3)/4} s^{2(m,(q+1)/2)} + \frac{1}{2}q(q-1)s^{(q+1)/2}\Bigg],$$

$$\dim V_{\psi}^{q+1}(G) = \frac{2}{q^2-1}\Bigg[qs^{q+1} + q(q+1)\sum_{l=1}^{(q-3)/4} s^{2+2(l,(q-1)/2)} - q(q-1)\sum_{m=1}^{(q-3)/4} s^{2(m,(q+1)/2)} - \frac{1}{2}q(q-1)s^{(q+1)/2}\Bigg],$$

$$\dim V_{\chi_i}^{q+1}(G) = \frac{2}{q(q-1)}\Bigg[(q+1)s^{q+1} + (q^2-1)s^{1+p^{n-1}} + q(q+1)\sum_{l=1}^{(q-3)/4} (\rho^{il}+\rho^{-il})s^{2+2(l,(q-1)/2)}\Bigg], \quad i = 2,4,6,\ldots,(q-3)/2$$

$$\dim V_{\theta_j}^{q+1}(G) = \frac{2}{q(q+1)}\Bigg[(q-1)s^{q+1} - (q^2-1)s^{1+p^{n-1}} - q(q-1)\sum_{m=1}^{(q-3)/4} (\sigma^{jm}+\sigma^{-jm})s^{2(m,(q+1)/2)} - \frac{1}{2}q(q-1)(\sigma^{j(q+1)/4}+\sigma^{-j(q+1)/4})s^{(q+1)/2}\Bigg], \quad j = 2,4,6,\ldots,(q-3)/2$$

$$\dim V_{\eta_1}^{q+1}(G) = \frac{1}{q(q+1)}\Bigg[\frac{1}{2}(q-1)s^{q+1} - \frac{1}{2}(q^2-1)s^{1+p^{n-1}} - q(q-1)\sum_{m=1}^{(q-3)/4} (-1)^m s^{2(m,(q+1)/2)} + (-1)^{(q+5)/4}\frac{1}{2}q(q-1)s^{(q+1)/2}\Bigg],$$

$$\dim V_{\eta_2}^{q+1}(G) = \frac{1}{q(q+1)}\Bigg[\frac{1}{2}(q-1)s^{q+1} - \frac{1}{2}(q^2-1)s^{1+p^{n-1}} - q(q-1)\sum_{m=1}^{(q-3)/4} (-1)^m s^{2(m,(q+1)/2)} + (-1)^{(q+5)/4}\frac{1}{2}q(q-1)s^{(q+1)/2}\Bigg].$$

قضیهٔ ۳.۴.۲ فرض کنیم $G = PSL_2(q)$ زیرگروهی از $\$_{q+1}$ باشد، q زوج، $q = 2^n$ و V را فضای برداری s بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای $\chi \in I(G)$ فرمول‌های زیر برای بعد $V_{\chi}^{q+1}(G)$ برقرارند.

$$\dim V_{1_G}^{q+1}(G) = \frac{1}{q(q^2-1)}\left[s^{q+1} + (q^2-1)s^{(q+2)/2} + q(q+1)\sum_{l=1}^{(q-2)/2} s^{2+(l,q-1)} + q(q-1)\sum_{m=1}^{q/2} s^{(m,q+1)}\right],$$

$$\dim V_{\psi}^{q+1}(G) = \frac{1}{q^2-1}\left[qs^{q+1} + q(q+1)\sum_{l=1}^{(q-2)/2} s^{2+(l,q-1)} - q(q-1)\sum_{m=1}^{q/2} s^{(m,q+1)}\right],$$

$$\dim V_{\chi_i}^{q+1}(G) = \frac{1}{q(q-1)}\left[(q+1)s^{q+1} + (q^2-1)s^{(q+2)/2} + q(q+1)\sum_{l=1}^{(q-2)/2} (\rho^{il}+\rho^{-il})s^{2+(l,q-1)}\right],$$
$$i = 1, 2, \ldots, (q-2)/2$$

$$\dim V_{\theta_j}^{q+1}(G) = \frac{1}{q(q+1)}\left[(q-1)s^{q+1} - (q^2-1)s^{(q+2)/2} - q(q-1)\sum_{m=1}^{q/2}(\sigma^{jm}+\sigma^{-jm})s^{(m,q+1)}\right],$$
$$j = 1, 2, \ldots, q/2$$

فصل سوم

کلاس تقارن تانسوری غیربدیهی

این فصل شامل چهار بخش است. در بخش ۱ مطالبی مقدماتی از نیاز به بررسی کلاس‌های تقارن تانسوری غیربدیهی ارائه خواهیم کرد. همچنین با مثالی نشان می‌دهیم که دانستن فرمول صریح بعد این کلاس‌ها، ممکن است اطلاعاتی در مورد بدیهی و یا غیربدیهی بودن این کلاس‌ها ندهد. در بخش ۲ محکی کارساز را برای بررسی غیر بدیهی بودن کلاس تقارن تانسوری به‌دست خواهیم آورد. در بخش‌های ۳ و ۴ گروه‌های معینی را که قبلاً فرمول صریح بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به آنها را محاسبه کرده‌ایم در نظر می‌گیریم و این کلاس‌ها را از نظر غیربدیهی بودن بررسی می‌کنیم.

۳-۱ مقدمه

در این بخش G را زیرگروهی از S_n و χ را سرشتی تحویل‌ناپذیر از G فرض می‌کنیم. همچنین V را فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. یکی از مسایل کاملاً طبیعی در مطالعهٔ یک فضای برداری مسأله صفر شدن و یا صفر نشدن آن فضا است. در مطالعهٔ کلاس تقارن تانسوری نیز این مسأله از همان ابتدا مطرح بوده است که به‌ازای چه Gها، و چه χهایی $V_\chi^n(G)$ غیرصفر است. قابل توجه است که اشاره کنیم هنوز این مسأله حل نشده است[1]. در واقع مسأله مطرح، آنقدر سخت است که خیلی اوقات حتی نمی‌توان مشخص کرد که برای G و χی داده شده‌ای، $V_\chi^n(G)$ غیرصفر است و یا نه، چه برسد به اینکه تمام Gها و χها که برای آنها $V_\chi^n(G)$ غیرصفر است را رده‌بندی کنیم. در نتیجه محققان در مورد این مسأله، صفر شدن و یا صفر نشدن $V_\chi^n(G)$ را به‌ازای گروهی معین و سرشتی تحویل‌ناپذیر از

۱) در سال ۱۹۷۶ مریس در مقاله‌ای (نگاه کنید به [16]) شرط لازم و کافی برای غیرصفر بودن $V_\chi^n(G)$ پیدا کرده است. مریس برای این منظور از دوگانی بین نمایش‌های S_n و نمایش‌های چندجمله‌ای $GL(V,\mathbb{C})$ استفاده کرده است، ولیکن به کمک شرط معادل به‌دست آمده نیز نتوانسته‌اند تمام Gها و χهایی را که به ازای آنها $V_\chi^n(G)$ غیرصفر است را پیدا کنند.

آن بررسی می‌کنند.

تذکر ۱.۱.۳ توجه می‌کنیم که اگر فرض کنیم $\dim V = m = 1$، آنگاه بنابر قضیهٔ ۴.۱.۲

$$\dim V_\chi^n(G) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) = \chi(1)(\chi, 1_G)_G,$$

و لذا بنا بر تذکر ۳۰.۱.۰ به‌دست می‌آوریم

$$\dim V_\chi^n(G) = \begin{cases} 0 & : \ \chi \neq 1_G \text{ اگر} \\ 1 & : \ \chi = 1_G \text{ اگر} \end{cases}$$

در نتیجه در این حالت $V_\chi^n(G) = o$ وقتی $\chi \neq 1_G$ و $V_{1_G}^n(G) \neq o$. لذا در بررسی مسایل مربوط به غیربدیهی بودن $V_\chi^n(G)$ همواره فرض می‌کنیم $\dim V = m \geq 2$. همچنین همواره فرض خواهیم کرد $n \geq 2$.

یکی از راه‌های حمله به این مسأله، پیدا کردن فرمول صریح بعد $V_\chi^n(G)$ برای G و χی داده شده است، زیرا شاید بتوان از روی فرمول بعد تشخیص داد که $V_\chi^n(G)$ صفر است یا نه. برای روشن شدن مطلب مثال زیر را می‌آوریم.

مثال ۲.۱.۳ فرض کنیم π دوری به طول n در S_n باشد و قرار می‌دهیم $G = \langle \pi \rangle$. اگر $\chi = 1_G$ سرشت اصلی G باشد، آنگاه بنابر مثال ۶.۱.۲

$$\dim V_\chi^n(G) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) m^d$$

که در آن φ تابعی فیِ اویلر است. چون این تابع همواره اعداد طبیعی را به‌خود می‌گیرد، لذا فرمول بالا به‌وضوح حاکی از آن است که برای این کلاس تقارن تانسوری خاص $V_\chi^n(G) \neq o$.

تذکر ۳.۱.۳ توجه می‌کنیم که این روش برای بررسی اینکه به‌ازای G و χی داده شده‌ای آیا $V_\chi^n(G)$ صفر است و یا نه، به روشی کارساز تبدیل نشد[۲]، زیرا اغلب موارد یا اصلاً نمی‌توان فرمول بعد را به‌طور صریح مشخص کرد و یا اینکه فرمول صریح به‌دست آمده آنقدر پیچیده است که نمی‌توان از روی آن صفر بودن و یا نبودنش را تشخیص داد. در نتیجه ردهٔ دیگری از مطالعات شروع شد تا ابزارهایی مناسب‌تر برای حمله به این مسأله به‌دست آید. آنچه در زیر به آن اشاره می‌کنیم توضیح در مورد یکی از این ابزارهای حمله به مسأله مطرح می‌باشد.

۲) به علت پیچیدگی محاسبهٔ فرمول بعد به‌طور صریح به‌ازای G و χی داده شده و ارتباط آن به مطالب مربوط به نظریهٔ اعداد، محاسبهٔ فرمول بعد به‌طور صریح، به یک مسألهٔ پر هیجان تبدیل شده است (صرفنظر از اینکه آیا به کمک آن می‌توان صفر شدن و یا صفر نشدن کلاس تقارن تانسوری وابسته را به‌دست آورد یا نه). مثال ۶.۱.۲ به همراه یک فرمول بعد دیگر موضوع مقالهٔ ۵ صفحه‌ای [3] را تشکیل داده‌اند. همچنین در مقالات [4]، [5]، [6]، [10] و [22] نیز فرمول صریح بعد برای کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه‌هایی معین محاسبه شده‌اند.

۳-۲ تجزیهٔ کلاس تقارن تانسوری

در این بخش نیز G را زیرگروهی از $\$_n$ فرض می‌کنیم و χ را سرشتی تحویل‌ناپذیر از G. همچنین V را فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که Γ_m^n برابر است با مجموعهٔ تمام nتایی های مرتب $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ که در آن $1 \leq \alpha_i \leq m$، یعنی

$$\Gamma_m^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | 1 \leq \alpha_i \leq m\}$$

(نگاه کنید به تعریف ۱.۱.۲). همچنین گروه G توسط $\sigma.\alpha = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)})$ روی Γ_m^n عمل می‌کند (نگاه کنید به قضیهٔ ۲.۱.۲). یادآوری می‌کنیم که اگر $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایه‌ای برای V باشد، در این صورت بنابر تعریف ۵.۲.۱ e_α^* برابر است با $e_\alpha^* = e_{\alpha_1} * \cdots * e_{\alpha_n} = T(G,\chi)(e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n}) = T(G,\chi)(e_\alpha^\otimes)$.

لم ۱.۲.۳ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت $\{e_\alpha^* | \alpha \in \Gamma_m^n\}$ کلاس تقارن تانسوری $V_\chi^n(G)$ را تولید می‌کند، یعنی

$$V_\chi^n(G) = \underset{\alpha \in \Gamma_m^n}{+} \langle e_\alpha^* \rangle.$$

برهان. متقارن‌ساز $T(G,\chi) : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$ را که در تعریف ۸.۱.۱ معرفی کردیم در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف ۴.۲.۱ می‌دانیم $V_\chi^n(G) = Im\ T(G,\chi)$. اکنون توجه می‌کنیم که $\{e_\alpha^\otimes | \alpha \in \Gamma_m^n\}$ پایه‌ای برای $\overset{n}{\otimes} V$ است، لذا $\{T(G,\chi)(e_\alpha^\otimes) | \alpha \in \Gamma_m^n\} = \{e_\alpha^* | \alpha \in \Gamma_m^n\}$ کلاس تقارن تانسوری $V_\chi^n(G)$ را تولید خواهد کرد. □

تعریف ۲.۲.۳ عمل G را روی Γ_m^n در نظر می‌گیریم. برای هر $\alpha \in \Gamma_m^n$، مدار α را که با $O(\alpha)$ نمایش می‌دهیم به‌صورت $O(\alpha) = \{\sigma.\alpha | \sigma \in G\}$ تعریف می‌کنیم.

توجه می‌کنیم که مجموعهٔ تمام مدارهای مجزای Γ_m^n وقتی که G روی Γ_m^n عمل می‌کند افرازی از Γ_m^n را به‌وجود می‌آورند.

تعریف ۳.۲.۳ عمل G را روی Γ_m^n در نظر می‌گیریم. Δ را مجموعهٔ تمام نمایندهٔ مدارهای مجزای Γ_m^n وقتی که G روی Γ_m^n عمل می‌کند تعریف می‌کنیم.

اکنون به کمک مجموعهٔ Δ می‌توانیم صورت ترمیم یافته‌تری از لم ۱.۲.۳ را به‌دست آوریم.

لم ۴.۲.۳ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت

$$V_\chi^n(G) = \underset{\alpha\in\Delta}{+} \langle e^*_{\sigma.\alpha} | \sigma \in G\rangle.$$

برهان. توجه می‌کنیم که $\Gamma_m^n = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} O(\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \{\sigma.\alpha | \sigma \in G\}$ و لذا با توجه به لم ۱.۲.۳

$$\begin{aligned} V_\chi^n(G) &= \underset{\alpha\in\Gamma_m^n}{+} \langle e^*_\alpha\rangle \\ &= \underset{\alpha\in\Delta}{+} \ \underset{\beta\in O(\alpha)}{+} \langle e^*_\beta\rangle \\ &= \underset{\alpha\in\Delta}{+} \ \underset{\sigma\in G}{+} \langle e^*_{\sigma.\alpha}\rangle \\ &= \underset{\alpha\in\Delta}{+} \langle e^*_{\sigma.\alpha} \mid \sigma \in G\rangle. \ \square \end{aligned}$$

تعریف ۵.۲.۳ برای هر $\alpha \in \Delta$، زیر فضای مداری وابسته به α را که با V_α^* نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V_\alpha^* = \langle e^*_{\sigma.\alpha} \mid \sigma \in G\rangle.$$

در پرتو این تعریف، **لم ۴.۲.۳** شکل جدیدی به خود می‌گیرد:

لم ۶.۲.۳ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت

$$V_\chi^n(G) = \underset{\alpha\in\Delta}{+} V_\alpha^*.$$

اکنون نشان می‌دهیم که مجموع بالا، در واقع مستقیم است. این موضوع در قضیهٔ بعد ظاهر شده است.

قضیهٔ ۷.۲.۳ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت

$$V_\chi^n(G) = \underset{\alpha\in\Delta}{\oplus} V_\alpha^*.$$

برهان. V را به یک ضرب داخلی مجهز می‌کنیم، با این خاصیت که $\{e_1, \ldots, e_m\}$ نسبت به این ضرب داخلی به پایه‌ای متعامد و یکّه تبدیل گردد. ضرب داخلی روی V، یک ضرب داخلی روی $\overset{n}{\otimes} V$ به‌صورت $\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle = \prod\limits_{i=1}^n \langle u_i | v_i\rangle$ القاء می‌کند که تحدید آن به $V_\chi^n(G)$، کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ را به یک فضای ضرب داخلی بدل می‌کند. اکنون $\alpha, \beta \in \Delta$، $\alpha \neq \beta$، را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $V_\alpha^* \perp V_\beta^*$.

برای این منظور توجه می‌کنیم که برای هر $u_1,\dots,u_n$ و $v_1,\dots,v_n$ از V و هر $\sigma \in G$

$$\begin{aligned}\langle P(\sigma)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle &= \langle u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(n)} \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{n}\langle u_{\sigma^{-1}(i)} \mid v_i\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{n}\langle u_i \mid v_{\sigma(i)}\rangle \\ &= \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}\rangle \\ &= \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid P(\sigma^{-1})(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\rangle\ ,\end{aligned}$$

و لذا $P(\sigma)^* = P(\sigma^{-1})$. در نتیجه

$$\begin{aligned}T(G,\chi)^* &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\overline{\chi(\sigma)}P(\sigma)^* \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\overline{\chi(\sigma)}P(\sigma^{-1}) \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})P(\sigma^{-1}) && \text{بنابر قضیهٔ ۲۴.۱.۰} \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma) \\ &= T(G,\chi)\ .\end{aligned}$$

یعنی عملگر $T(G,\chi)$ عملگری خودالحاق است. در نتیجه برای $e^*_{\sigma.\alpha} \in V^*_\alpha$ و $e^*_{\tau.\beta} \in V^*_\beta$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle e^*_{\sigma.\alpha}|e^*_{\tau.\beta}\rangle &= \langle T(G,\chi)(e^\otimes_{\sigma.\alpha}) \mid T(G,\chi)(e^\otimes_{\tau.\beta})\rangle \\ &= \langle T(G,\chi)^*T(G,\chi)(e^\otimes_{\sigma.\alpha}) \mid e^\otimes_{\tau.\beta}\rangle \\ &= \langle T(G,\chi)(e^\otimes_{\sigma.\alpha}) \mid e^\otimes_{\tau.\beta}\rangle && \text{بنابر قضیهٔ ۱۰.۱.۱} \\ &= \langle \tfrac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\mu\in G}\chi(\mu)P(\mu)(e^\otimes_{\sigma.\alpha}) \mid e^\otimes_{\tau.\beta}\rangle \\ &= \langle \tfrac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\mu\in G}\chi(\mu)e^\otimes_{\mu\sigma.\alpha} \mid e^\otimes_{\tau.\beta}\rangle \\ &= \tfrac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\mu\in G}\chi(\mu)\prod_{i=1}^{n}\langle e_{\alpha_{(\mu\sigma)^{-1}(i)}} \mid e_{\beta_{\tau^{-1}(i)}}\rangle \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که برای هر $\alpha \neq \beta$ در Δ، $V^*_\alpha \perp V^*_\beta$ و لذا لم ۶.۲.۳ نتیجه می‌دهد که $V^n_\chi(G) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} V^*_\alpha$. □

قضیهٔ بالا تجزیه‌ای از کلاس تقارن تانسوری $V_\chi^n(G)$ به‌دست می‌دهد. نکته قابل توجه این است که ممکن است برای بعضی از $\alpha \in \Delta$ها، V_α^* صفر باشد. می‌خواهیم این αها را شناسایی کنیم. قضیهٔ زیر که توسط فریز در مقالهٔ [9] ثابت شده است به این سؤال پاسخ می‌دهد. توجه می‌کنیم که نمادی در صورت این قضیه ظاهر می‌شود که آنرا در زیر تعریف می‌کنیم. همچنین برهانی که در زیر برای این قضیه مطرح می‌کنیم با برهان ارائه شده در [9] فرق می‌کند.

تعریف ۸.۲.۳ عمل G را روی Γ_m^n در نظر می‌گیریم. برای هر $\alpha \in \Gamma_m^n$، پایدارساز α را که با G_α نمایش می‌دهیم به‌صورت $G_\alpha = \{\sigma \in G \mid \sigma.\alpha = \alpha\}$ تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ ۹.۲.۳ (قضیهٔ فریز). برای هر $\alpha \in \Delta$، بعد V_α^*، $\dim V_\alpha^*$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\dim V_\alpha^* = \chi(1)(\chi\downarrow_{G_\alpha}, 1_{G_\alpha})_{G_\alpha} = \frac{\chi(1)}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)$$

برهان. گیریم $\{e_1, \dots, e_m\}$ پایه‌ای برای V باشد. برای $\alpha \in \Delta$، فرض می‌کنیم $V_\alpha^\otimes = \langle e_{\tau.\alpha}^\otimes | \tau \in G\rangle$. عملگر جایگشتی $P(\sigma) : \overset{n}{\otimes}V \to \overset{n}{\otimes}V$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $P_\alpha(\sigma)$ تحدید $P(\sigma)$ به $V_\alpha^\otimes$ باشد. تساوی‌های

$$\begin{aligned} P_\alpha(\sigma)(e_{\tau.\alpha}^\otimes) &= P_\alpha(\sigma)(e_{\alpha_{\tau^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{\tau^{-1}(n)}}) \\ &= e_{\alpha_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(n))}} \\ &= e_{\alpha_{(\sigma\tau)^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{(\sigma\tau)^{-1}(n)}} \\ &= e_{\sigma\tau.\alpha}^\otimes \end{aligned}$$

نشان می‌دهد که $P_\alpha(\sigma)(e_{\tau.\alpha}^\otimes) \in V_\alpha^\otimes$ و لذا $V_\alpha^\otimes$ تحت $P_\alpha(\sigma)$ پایا می‌باشد. در نتیجه $P_\alpha(\sigma) : V_\alpha^\otimes \to V_\alpha^\otimes$ یک عملگر خطی خواهد شد. اینکه برای هر $\sigma, \tau \in G$، $P(\sigma\tau) = P(\sigma)P(\tau)$، خاصیت $P_\alpha(\sigma\tau) = P_\alpha(\sigma)P_\alpha(\tau)$ را به ارث می‌رساند و $P_\alpha : G \to GL(V_\alpha^\otimes, \mathbb{C})$ را با تعریف $P_\alpha : \sigma \to P_\alpha(\sigma)$ به یک نمایش ازگروه G تبدیل می‌کند واضح است. اکنون فرض می‌کنیم ξ سرشت تأمین شده توسط P_α باشد، و نشان می‌دهیم $\xi = 1_{G_\alpha}\uparrow^G$. برای این منظور از قضیهٔ ۳۳.۱.۰ استفاده می‌کنیم. با توجه به محاسبه‌ای که در بالا انجام دادیم، $P_\alpha(\sigma)(e_{\tau.\alpha}^\otimes) = e_{\sigma\tau.\alpha}^\otimes$ ، نتیجه می‌گیریم قطر اصلی ماتریس $P_\alpha(\sigma)$ نسبت به پایهٔ $\{e_{\tau.\alpha}^\otimes | \tau \in G\}$ برای $V_\alpha^\otimes$ از صفر و یک تشکیل شده است، و یک فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $\tau.\alpha = \sigma\tau.\alpha$ یا $\tau^{-1}\sigma\tau.\alpha = \alpha$ یا $\tau^{-1}\sigma\tau \in G_\alpha$. لذا

$$\xi(\sigma) = tr\ P_\alpha(\sigma) = \frac{1}{|G_\alpha|}|\{\tau \in G | \tau^{-1}\sigma\tau \in G_\alpha\}| = \frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\tau\in G}\mathring{1}_{G_\alpha}(\tau^{-1}\sigma\tau) = \frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\tau\in G}\mathring{1}_{G_\alpha}(\tau\sigma\tau^{-1})$$

که در آن

$$\mathring{1}_{G_\alpha}(\mu) = \begin{cases} 1 & : \mu \in G_\alpha \quad \text{اگر} \\ 0 & : \mu \notin G_\alpha \quad \text{اگر} \end{cases}$$

اکنون قضیهٔ ۳۳.۱.۰ نتیجه می‌دهد که $\xi(\sigma) = 1_{G_\alpha} \uparrow^G (\sigma)$ و لذا $\xi = 1_{G_\alpha} \uparrow^G$.

حال عملگر خطی $T_\alpha(G,\chi) : V_\alpha^{\otimes} \to V_\alpha^{\otimes}$ را به‌صورت $T_\alpha(G,\chi) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma)P_\alpha(\sigma)$ تعریف می‌کنیم. مطابق برهان قضیهٔ ۱۰.۱.۱ دیده می‌شود که $T_\alpha(G,\chi)$ خودتوان است. امّا توجه می‌کنیم $V_\alpha^* = Im\ T_\alpha(G,\chi)$ و لذا

$$\begin{aligned}
\dim V_\alpha^* &= \dim Im\ T_\alpha(G,\chi) \\
&= Rank\ T_\alpha(G,\chi) \\
&= tr\ T_\alpha(G,\chi) \\
&= tr\left(\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma)P_\alpha(\sigma)\right) \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) tr\ P_\alpha(\sigma) \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma)\xi(\sigma) \\
&= \chi(1)(\chi,\xi)_G \\
&= \chi(1)(\chi, 1_{G_\alpha}\uparrow^G)_G \\
&= \chi(1)(\chi\downarrow_{G_\alpha}, 1_{G_\alpha})_{G_\alpha} \qquad \text{بنابر قضیهٔ ۳۵.۱.۰}
\end{aligned}$$

لذا ثابت می‌شود که $\dim V_\alpha^* = \chi(1)(\chi\downarrow_{G_\alpha}, 1_{G_\alpha})_{G_\alpha} = \frac{\chi(1)}{|G_\alpha|} \sum_{\sigma\in G_\alpha} \chi(\sigma)$. $\square$

تعریف ۱۰.۲.۳ $\overline{\Delta}$ را مجموعهٔ تمام $\alpha \in \Delta$ها در نظر می‌گیریم که $\sum_{\sigma\in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0$. همچنین Ω را مجموعهٔ تمام $\alpha \in \Gamma_m^n$ها در نظر می‌گیریم که $\sum_{\sigma\in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0$. یعنی

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta} &= \{\alpha \in \Delta | \sum_{\sigma\in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0\}, \\
\Omega &= \{\alpha \in \Gamma_m^n | \sum_{\sigma\in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0\}.
\end{aligned}$$

در پرتو قضیهٔ ۹.۲.۳ و تعریف ۱۰.۲.۳ در می‌یابیم که فقط برای αهایی که $\alpha \in \Omega$، $V_\alpha^* \neq o$، و لذا قضیهٔ ۷.۲.۳ به‌صورت زیر بهبود می‌یابد.

قضیهٔ ۱۱.۲.۳ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت

$$V_\chi^n(G) = \bigoplus_{\alpha\in\overline{\Delta}} V_\alpha^*$$

که مطابق معمول اگر $\overline{\Delta} = \varnothing$، طرف راست را o تعریف می‌کنیم.

نتیجهٔ ۱۲.۲.۳ فرض کنیم χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر خطی باشد. در این صورت برای هر $\alpha \in \overline{\Delta}$، $\dim V_\alpha^* = ۱$.

برهان. چون χ سرشت تحویل‌ناپذیر خطی از G می‌باشد، لذا $\chi(۱) = ۱$ در نتیجه $\chi \downarrow_{G_\alpha} (۱) = ۱$. یعنی اینکه $\chi \downarrow_{G_\alpha}$ خطی است و لزوماً سرشتی تحویل‌ناپذیر از G_α خواهد بود. در نتیجه بنابر تذکر ۳۰.۱.۰، $(\chi \downarrow_{G_\alpha}, ۱_{G_\alpha})_{G_\alpha} = ۰$ یا ۱. اکنون قضیهٔ ۹.۲.۳ نتیجه می‌دهد که $\dim V_\alpha^* = ۰$ یا ۱ و چون $\alpha \in \overline{\Delta}$ پس $\dim V_\alpha^* = ۱$. $\square$

تذکر ۱۳.۲.۳ از قضایای ۹.۲.۳ و ۱۱.۲.۳ و تعریف ۱۰.۲.۳ نتیجه می‌شود که اگر $\Omega \neq \varnothing$، آنگاه $V_\chi^n(G) \neq o$ و لذا محکی مناسب برای غیربدیهی بودن کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ به‌دست می‌آید:
اگر $\alpha \in \Gamma_m^n$ موجود باشد که $\sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq ۰$ (معادلاً $(\chi \downarrow_{G_\alpha}, ۱_{G_\alpha})_{G_\alpha} \neq ۰$) در این صورت $V_\chi^n(G) \neq o$.

قضیهٔ ۱۴.۲.۳ برای $m \geq n$، $V_\chi^n(G) \neq o$.

برهان. با توجه به شرط $m \geq n$، $\alpha = (۱, ۲, \ldots, n)$ عضوی از Γ_m^n است. چون تمام مؤلفه‌های α متمایز هستند، با توجه به عمل G روی Γ_m^n به‌وضوح به‌دست می‌آوریم $G_\alpha = \{۱\}$ و در نتیجه $\sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma) = \chi(۱) \neq ۰$، یعنی $V_\chi^n(G) \neq o$. $\square$

در مقالات [16] و [18] به کمک محک بالا غیربدیهی بودن چند کلاس تقارن تانسوری بیان شده است.

۳ـ۳ کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه G وقتی G با نمایش کیلی در $\$_n$ می‌نشیند

در ۲ـ۳ کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه G وقتی G با نمایش کیلی در $\$_n$ می‌نشیند را در نظر گرفتیم و فرمول صریح برای محاسبهٔ بعد این کلاس را به‌دست آوردیم. اکنون در این بخش این کلاس‌ها را از نظر غیربدیهی بودن مورد بررسی قرار خواهیم داد. مطالب این بخش، قسمتی از [5] و [7] را تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ ۱.۳.۳ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد که به‌طور وفادار روی مجموعهٔ n عضوی Ω عمل می‌کند و V را یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. اگر برای هر $g \in G - \{۱\}$، $|\text{fix}(g)| \leq l$ آنگاه برای هر $m \geq l + ۲$ و $\chi \in I(G)$، $V_\chi^n(G) \neq o$.

برهان. گیریم برای هر $g \in G - \{۱\}$، $|\text{fix}(g)| \leq l'$ که در آن l' کران بالای بهینه است، یعنی l' طوری است که $g \in G - \{۱\}$ موجود است که $|\text{fix}(g)| = l'$. لذا $l' \leq l$ و $l' \leq n - ۲$. عمل G را روی Γ_m^n در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\alpha = (۱, ۲, \ldots, l', l' + ۱, l' + ۲, \ldots, l' + ۲)$. اگر $m \geq l + ۲$ به‌دست می‌آوریم $m \geq l' + ۲$ و لذا $n \geq l' + ۲$ نتیجه می‌دهد که $\alpha \in \Gamma_m^n$ و می‌توانیم Δ را طوری بگیریم که $\alpha \in \Delta$. بنابر فرض به‌راحتی به‌دست می‌آوریم که $G_\alpha = \{۱\}$، در نتیجه $\sum\limits_{g \in G_\alpha} \chi(g) = \chi(۱) \neq ۰$ و لذا $\alpha \in \overline{\Delta}$. اکنون ناتهی بودن $\overline{\Delta}$ بنابر تذکر ۱۳.۲.۳ حکم را نتیجه می‌دهد. □

حال با توجه به اینکه برای هر $g \in G - \{۱\}$، $|\text{fix}(g)| \leq n - ۲$، لذا نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم. توجه می‌کنیم که قسمتی از این نتیجه همان قضیهٔ ۱۴.۲.۳ است. لذا قضیهٔ ۱.۳.۳ تعمیم قضیهٔ ۱۴.۲.۳ خواهد بود.

نتیجهٔ ۲.۳.۳ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد که به‌طور وفادار روی مجموعهٔ n عضوی Ω عمل می‌کند و V را یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای هر $m \geq n$ و $\chi \in I(G)$، $V_\chi^n(G) \neq o$. بالاخص برای هر زیرگروه G از $\$_n$ وقتی $m \geq n$ داریم $V_\chi^n(G) \neq o$.

اکنون نشان می‌دهیم که در حالت خاص وقتی G با نمایش کیلی زیرگروهی از $\$_n$ در نظرگرفته می‌شود، کلاس‌های تقارن تانسوری وابسته به G و سرشتهای تحویل‌ناپذیر G، همگی غیربدیهی‌اند.

قضیهٔ ۳.۳.۳ فرض کنیم G یک گروه n عضوی باشد که با نمایش کیلی زیرگروهی از $\$_n$ است. اگر V فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ فرض شود، آنگاه برای هر $m \geq ۲$ و $\chi \in I(G)$، $V_\chi^n(G) \neq o$.

برهان. از ساختار نشاندن G در $\$_n$ با نمایش کیلی واضح است که برای هر $g \in G - \{۱\}$، $|\text{fix}(g)| = ۰$ و لذا بنابر قضیهٔ ۱.۳.۳ حکم نتیجه می‌شود. □

اکنون گروه دو دوری $G = T_{۴n}$ را که در ۲ـ۳ معرفی شده در نظر می‌گیریم. این گروه با نمایش کیلی در $\$_{۴n}$

می‌نشیند و لذا نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

نتیجهٔ ۴.۳.۳ گروه $G = T_{۴n}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم V یک فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت برای هر $m \geq ۲$ و $\chi \in I(G)$، $V_{\chi}^{۴n}(G) \neq o$.

۳-۴ کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه $G = PSL_{۲}(q)$

در ۲ـ۴، پس از معرفی گروه $G = PSL_{۲}(q)$ کلاس تقارن تانسوری وابسته به این گروه و سرشتهای تحویل‌ناپذیر آنرا از نظر محاسبهٔ بعد مورد توجه قرار دادیم. اکنون این کلاس‌ها را از نظر غیربدیهی بودن بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که گروه $G = PSL_{۲}(q)$ روی خط تصویری که شامل $q+۱$ نقطه است به‌صورت ۲ـانتقالی و وفادار عمل می‌کند و لذا می‌توانیم فرض کنیم $G \leq \$_{q+۱}$ و در نتیجه $V_{\chi}^{q+۱}(G)$ برای هر $\chi \in I(G)$ با معنی خواهد بود. در سراسر این بخش V را فضای برداری از بعد s روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم و از جدول‌های موجود در ۲ـ۴ استفاده می‌کنیم. این مطالب بخشی از [6] را می‌پوشانند.

قضیهٔ ۱.۴.۳ گروه $G = PSL_{۲}(q)$ را به‌عنوان زیرگروهی از $\$_{q+۱}$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد طوری که $\dim V = s = ۲$. در این صورت:

۱) اگر q فرد، $q = p^n$، $q \overset{۴}{\equiv} ۱$، آنگاه برای هر χ،

$$\chi \in I(G) - \{\chi_i, \xi_۱, \xi_۲ \mid i = ۲, ۴, \ldots, (q-۵)/۲; i \overset{۴}{\equiv} ۲\}$$

$V_{\chi}^{q+۱}(G) \neq o$، به‌علاوه اگر $q \overset{۸}{\equiv} ۱$ آنگاه $V_{\xi_۱}^{q+۱}(G) \neq o$ و $V_{\xi_۲}^{q+۱}(G) \neq o$،

۲) اگر q فرد، $q = p^n$، $q \overset{۴}{\equiv} ۳$، آنگاه برای هر χ،

$$\chi \in I(G) - \{\theta_j, \eta_۱, \eta_۲ \mid j = ۲, ۴, \ldots, (q-۳)/۲; j \overset{۴}{\equiv} ۰\}$$

$V_{\chi}^{q+۱}(G) \neq o$، به‌علاوه اگر $q \overset{۸}{\equiv} ۳$ آنگاه $V_{\eta_۱}^{q+۱}(G) \neq o$ و $V_{\eta_۲}^{q+۱}(G) \neq o$،

۳) اگر q زوج، $q = ۲^n$، آنگاه برای هر χ،

$$\chi \in I(G) - \{\theta_j \mid ۱ \leq j \leq q/۲\}$$

$V_{\chi}^{q+۱}(G) \neq o$.

برهان. قرار می‌دهیم $\alpha = (۱,۱,۲,۲,\dots,۲) \in \Gamma_۲^{q+۱}$ و عمل G را روی زیرمجموعه‌های ۲ عضوی خط تصویری Ω که شامل $q+۱$ نقطه است، $\Omega^{\{۲\}}$، در نظر می‌گیریم. به‌وضوح این عمل انتقالی است. $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$، $G_{\{\tilde{\Omega}\}}$، $|\tilde{\Omega}| = ۲$ را پایدارساز مجموعه‌ای $\tilde{\Omega}$ در نظر می‌گیریم. به‌وضوح $G_\alpha = G_{\{\tilde{\Omega}\}}$. بنابر قضیهٔ ۳۵.۱.۰ به‌دست می‌آوریم $(\chi\downarrow_{G_\alpha}, ۱_{G_\alpha})_{G_\alpha} = (\chi, ۱_{G_\alpha}\uparrow^G)_G$. ولیکن $\xi = {۱_{G_{\{\tilde{\Omega}\}}}}\uparrow^G = ۱_{G_\alpha}\uparrow^G$ سرشت جایگشتی G است که از عمل G روی $\Omega^{\{۲\}}$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$(\chi\downarrow_{G_\alpha}, ۱_{G_\alpha})_{G_\alpha} = (\chi, \xi)_G$$

که در آن $\xi(g)$ تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی Ω است که تحت g پایا هستند. g را به‌عنوان جایگشتی روی Ω در نظر می‌گیریم و یادآوری می‌کنیم که سرشت جایگشتی G حاصل از عمل G روی Ω را با θ نمایش می‌دهیم. بنابراین $\binom{\theta(g)}{۲}$ زیرمجموعهٔ ۲ عضوی از Ω تحت g به مفهوم مجموعه‌ای پایدارند. محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که $\frac{۱}{۲}(\theta(g^۲) - \theta(g))$ دور به طول ۲ در تجزیهٔ دوری g ظاهر می‌شوند، و لذا تعداد کل زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از Ω که توسط g پایدارند برابر است با

$$\xi(g) = \binom{\theta(g)}{۲} + \frac{\theta(g^۲) - \theta(g)}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\theta(g)^۲ + \theta(g^۲)\right) - \theta(g).$$

به کمک جدول‌های IV، V و VI که در ۲ـ۴ ظاهر شده‌اند، مقادیر ξ را در جدول‌های VII، VIII و IX محاسبه کرده‌ایم.

اگر $q \overset{۴}{\equiv} ۱$، آنگاه تجزیهٔ زیر از ξ را به کمک جدول‌های I و VII به‌دست می‌آوریم.

$$\xi = \begin{cases} ۱_G + ۲\psi + ۲\sum\limits_{i\overset{۴}{\equiv}۰}\chi_i + \sum\limits_{i\ \text{فرد}}\chi_i + \sum\limits_j \theta_j + \xi_۱ + \xi_۲ & : \text{اگر } q \overset{۸}{\equiv} ۱ \\ ۱_G + ۲\psi + ۲\sum\limits_{i\overset{۴}{\equiv}۰}\chi_i + \sum\limits_{i\ \text{فرد}}\chi_i + \sum\limits_j \theta_j & : \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

بنابراین اگر $\chi \in I(G) - \{\chi_i, \xi_۱, \xi_۲ \mid i = ۲,۴,\dots,(q-۵)/۲;\ i \overset{۴}{\equiv} ۲\}$ آنگاه $(\chi\downarrow_{G_\alpha}, ۱_{G_\alpha})_{G_\alpha} \neq ۰$ و لذا $V_\chi^{q+۱}(G) \neq o$، به‌علاوه اگر $q \overset{۸}{\equiv} ۱$ آنگاه $(\xi_۱\downarrow_{G_\alpha}, ۱_{G_\alpha})_{G_\alpha} \neq ۰$ و $(\xi_۲\downarrow_{G_\alpha}, ۱_{G_\alpha})_{G_\alpha} \neq ۰$ و لذا $V_{\xi_۱}^{q+۱}(G) \neq o$ و $V_{\xi_۲}^{q+۱}(G) \neq o$.

همچنین به کمک جدول‌های II و VIII وقتی $q \overset{۴}{\equiv} ۳$ تجزیهٔ زیر از ξ را به‌دست می‌آوریم.

$$\xi = \begin{cases} ۱_G + \psi + \sum\limits_i \chi_i + ۲\sum\limits_{j\overset{۴}{\equiv}۲}\theta_j + \sum\limits_{j\ \text{فرد}}\theta_j + \eta_۱ + \eta_۲ & : \text{اگر } q \overset{۸}{\equiv} ۳ \\ ۱_G + \psi + \sum\limits_i \chi_i + ۲\sum\limits_{j\overset{۴}{\equiv}۲}\theta_j + \sum\limits_{j\ \text{فرد}}\theta_j & : \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

بنابراین اگر $\chi \in I(G) - \{\theta_j, \eta_۱, \eta_۲ \mid j = ۲,۴,\dots,(q-۳)/۲;\ j \overset{۴}{\equiv} ۰\}$ ، آنگاه

$(\chi\downarrow_{G_\alpha},1_{G_\alpha})_{G_\alpha}\neq 0$ و لذا $V_\chi^{q+1}(G)\neq o$، به‌علاوه اگر $q\overset{8}{\equiv}3$ آنگاه $(\eta_1\downarrow_{G_\alpha},1_{G_\alpha})_{G_\alpha}\neq 0$ و $(\eta_2\downarrow_{G_\alpha},1_{G_\alpha})_{G_\alpha}\neq 0$ و لذا $V_{\eta_1}^{q+1}(G)\neq o$ و $V_{\eta_2}^{q+1}(G)\neq o$.

و بالاخره اگر q زوج باشد، به کمک جدول‌های III و IX به‌دست می‌آوریم

$$\xi = 1_G+\psi+\sum_i\chi_i.$$

و لذا اگر $\chi\in I(G)-\{\theta_j\mid 1\leq j\leq q/2\}$ آنگاه $(\chi\downarrow_{G_\alpha},1_{G_\alpha})_{G_\alpha}\neq 0$ و در نتیجه $V_\chi^{q+1}(G)\neq o$. $\square$

قضیهٔ ۲.۴.۳ گروه $G=PSL_2(q)$ را به‌عنوان زیرگروهی از $\$_{q+1}$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد طوری که $\dim V = s\geq 3$. در این صورت برای هر χ، $\chi\in I(G)$، $V_\chi^{q+1}(G)\neq o$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\dim V = s = 3$. قرار می‌دهیم $\alpha=(1,2,3,3,\ldots,3)\in\Gamma_3^{q+1}$ و عمل G را روی زوج‌های مرتب از خط تصویری Ω که شامل $q+1$ نقطه است، $\Omega^{(2)}$، در نظر می‌گیریم. به‌وضوح این عمل انتقالی است. $G_{(\hat\Omega)}$، $\hat\Omega\subseteq\Omega$، $|\hat\Omega|=2$ را پایدارساز نقطه‌ای $\hat\Omega$ در نظر می‌گیریم. به‌وضوح $G_\alpha=G_{(\hat\Omega)}$. بنابر قضیهٔ ۳۵.۱.۰ به‌دست می‌آوریم $(\chi\downarrow_{G_\alpha},1_{G_\alpha})_{G_\alpha}=(\chi,1_{G_\alpha}\uparrow^G)_G$. ولیکن $1_{G_\alpha}\uparrow^G=1_{G_{(\hat\Omega)}}\uparrow^G=\xi'$ سرشت جایگشتی حاصل از عمل G روی $\Omega^{(2)}$ است. بنابراین

$$(\chi\downarrow_{G_\alpha},1_{G_\alpha})_{G_\alpha}=(\chi,\xi')_G$$

که در آن $\xi'(g)$ تعداد زوج‌های مرتب Ω است که تحت g پایدار هستند و مانند برهان قضیه قبل به‌دست می‌آوریم

$$\xi'(g)=2\binom{\theta(g)}{2}=\theta(g)^2-\theta(g).$$

مقادیر ξ' را در جدول‌های VII، VIII و IX محاسبه کرده‌ایم. جدول سرشتهای تحویل‌ناپذیر $G=PSL_2(q)$ نتیجه می‌دهد که

$$\xi'=1_G+3\psi+2\sum_i\chi_i+2\sum_j\theta_j+\xi_1+\xi_2,$$

وقتی که $q\overset{4}{\equiv}1$ و لذا برای هر $\chi\in I(G)$، $(\chi\downarrow_{G_\alpha},1_{G_\alpha})_{G_\alpha}\neq 0$، در نتیجه $V_\chi^{q+1}(G)\neq o$. در حالت $q\overset{4}{\equiv}3$ نیز به‌دست می‌آوریم

$$\xi'=1_G+3\psi+2\sum_i\chi_i+2\sum_j\theta_j+\eta_1+\eta_2,$$

و لذا اگر $\chi \in I(G)$ آنگاه $(\chi \downarrow_{G_\alpha}, 1_{G_\alpha})_{G_\alpha} \neq 0$ و در نتیجه $V_\chi^{q+1}(G) \neq o$. در حالت q زوج نیز تجزیهٔ زیر از ξ' را به‌دست می‌آوریم

$$\xi' = 1_G + 2\psi + \sum_i \chi_i + \sum_j \theta_j,$$

و لذا برای هر $\chi \in I(G)$، $(\chi \downarrow_{G_\alpha}, 1_{G_\alpha})_{G_\alpha} \neq 0$ و در نتیجه $V_\chi^{q+1}(G) \neq o$. پس ثابت کرده‌ایم اگر $\dim V = s = 3$ آنگاه برای هر $\chi \in I(G)$، $V_\chi^{q+1}(G) \neq o$.

از طرفی بنابر جدول‌های IV، V و VI هر عضو G، به‌جز همانی، حداکثر ۲ نقطه را ثابت نگه می‌دارد و لذا برای هر $g \in G - \{1\}$، $|\mathrm{fix}(g)| \leq 2$. در نتیجه، قضیهٔ ۱.۳.۳ به‌دست می‌دهد که برای هر $\chi \in I(G)$ وقتی $\dim V = s \geq 4$، $V_\chi^{q+1}(G) \neq o$. $\square$

جدول VII. $G = PSL_۲(q)$، q فرد، $q = p^n$، $q \overset{۴}{\equiv} ۱$

g	$\{-I,I\}۱$	$\{-I,I\}c$	$\{-I,I\}d$	$\{-I,I\}a^l$	$\{-I,I\}a^{(q-۱)/۴}$	$\{-I,I\}b^m$
$\lvert C_G(g)\rvert$	$\frac{۱}{۲}q(q^۲-۱)$	q	q	$\frac{۱}{۲}(q-۱)$	$q-۱$	$\frac{۱}{۲}(q+۱)$
$\theta(g)$	$q+۱$	۱	۱	۲	۲	۰
$\xi(g)$	$\frac{۱}{۲}q(q+۱)$	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۲}(q+۱)$	۰
$\xi'(g)$	$q(q+۱)$	۰	۰	۲	۲	۰

$l = ۱, ۲, \dots, (q-۵)/۴$

$m = ۱, ۲, \dots, (q-۱)/۴$

جدول VIII. $G = PSL_۲(q)$، q فرد، $q = p^n$، $q \overset{۴}{\equiv} ۳$

g	$\{-I,I\}۱$	$\{-I,I\}c$	$\{-I,I\}d$	$\{-I,I\}a^l$	$\{-I,I\}b^m$	$\{-I,I\}b^{(q+۱)/۴}$
$\lvert C_G(g)\rvert$	$\frac{۱}{۲}q(q^۲-۱)$	q	q	$\frac{۱}{۲}(q-۱)$	$\frac{۱}{۲}(q+۱)$	$q+۱$
$\theta(g)$	$q+۱$	۱	۱	۲	۰	۰
$\xi(g)$	$\frac{۱}{۲}q(q+۱)$	۰	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۲}(q+۱)$
$\xi'(g)$	$q(q+۱)$	۰	۰	۲	۰	۰

$l = ۱, ۲, \dots, (q-۳)/۴$

$m = ۱, ۲, \dots, (q-۳)/۴$

جدول IX. $G = PSL_۲(q)$، q زوج، $q = ۲^n$

g	$\{I\}۱$	$\{I\}c$	$\{I\}a^l$	$\{I\}b^m$
$\lvert C_G(g)\rvert$	$q(q^۲-۱)$	q	$q-۱$	$q+۱$
$\theta(g)$	$q+۱$	۱	۲	۰
$\xi(g)$	$\frac{۱}{۲}q(q+۱)$	$\frac{۱}{۲}q$	۱	۰
$\xi'(g)$	$q(q+۱)$	۰	۲	۰

$۱ \leq l \leq (q-۲)/۲$

$۱ \leq m \leq q/۲$

فصل چهارم

پایه‌های متعامد در کلاس تقارن تانسوری

این فصل شامل سه بخش می‌باشد. در بخش ۱ کلاس‌های تقارن تانسوری را که به یک ضرب داخلی مجهز هستند بررسی می‌کنیم. در بخش ۲ پایه‌های متعامد خاصی برای این کلاس‌ها خواهیم ساخت و در بخش ۳ شرط لازم و کافی برای وجود چنین پایه‌هایی را برای کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه دو دوری پیدا خواهیم کرد. مطالب این فصل در قسمتی از [5] و [7] ظاهر شده‌اند.

۴-۱ کلاس تقارن تانسوری و ضرب داخلی

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم که G زیرگروهی از S_n است و χ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G. همچنین V را فضای یکانی m بعدی در نظر می‌گیریم. مطالب این بخش در [17] ظاهر شده‌اند.

V یک فضای یکانی m بعدی است و لذا به یک ضرب داخلی مجهز است. این ضرب داخلی روی $\overset{n}{\otimes} V$ یک ضرب داخلی به‌صورت

$$\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n | v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle u_i | v_i \rangle$$

القاء می‌کند. از آنجایی که $V_\chi^n(G)$ زیرفضایی از $\overset{n}{\otimes} V$ است، لذا تحدید ضرب داخلی القاء شده روی $\overset{n}{\otimes} V$ به $V_\chi^n(G)$، کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ را به یک فضای یکانی تبدیل می‌کند.

قضیهٔ ۴.۱.۱ $T(G, \chi)$ یک عملگر خطی خودالحاق است.

برهان. توجه می‌کنیم که برای هر $u_1, \dots, u_n$ و $v_1, \dots, v_n$ از V و هر $\sigma \in G$

$$\begin{aligned}\langle P(\sigma)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle &= \langle u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(n)} \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{n}\langle u_{\sigma^{-1}(i)} \mid v_i\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{n}\langle u_i \mid v_{\sigma(i)}\rangle \\ &= \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}\rangle \\ &= \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid P(\sigma^{-1})(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\rangle,\end{aligned}$$

و لذا $P(\sigma)^* = P(\sigma^{-1})$. در نتیجه

$$\begin{aligned}T(G,\chi)^* &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\overline{\chi(\sigma)}P(\sigma)^* \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\overline{\chi(\sigma)}P(\sigma^{-1}) \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})P(\sigma^{-1}) && \text{بنابر قضیهٔ ۲۴.۱.۰} \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma) \\ &= T(G,\chi).\end{aligned}$$

یعنی عملگر $T(G,\chi)$ عملگری خودالحاق است. $\square$

قضیهٔ ۲.۱.۴ مجموع مستقیم $\overset{n}{\otimes}V = \bigoplus_{\chi\in I(G)} V_\chi^n(G)$ مجموعی متعامد است.

برهان. فرض کنیم $\chi, \xi \in I(G)$، $\chi \neq \xi$، دلخواه باشند. برای هر $u_1 * \dots * u_n \in V_\chi^n(G)$ و $v_1 * \dots * v_n \in V_\xi^n(G)$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle u_1 * \dots * u_n \mid v_1 * \dots * v_n\rangle &= \langle T(G,\chi)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid T(G,\xi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\rangle \\ &= \langle T(G,\xi)^*T(G,\chi)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle \\ &= \langle T(G,\xi)T(G,\chi)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle && \text{بنابر قضیهٔ ۱.۱.۴} \\ &= \langle o \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle && \text{بنابر قضیهٔ ۱۱.۱.۱} \\ &= 0.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد $V_\chi^n(G)\perp V_\xi^n(G)$ و لذا حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

لم ۳.۱.۴ برای هر $u_1, \ldots, u_n$ و $v_1, \ldots, v_n$ از V

$$\langle u_1 * \ldots * u_n \mid v_1 * \ldots * v_n \rangle = \frac{\chi(1)}{|G|} d_\chi^G(A)$$

که در آن $A = [a_{ij}]_{n\times n} = [\langle u_i|v_j\rangle]_{n\times n}$ و $d_\chi^G(A) = \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$.

برهان.

$$\begin{aligned}
\langle u_1 * \ldots * u_n \mid v_1 * \ldots * v_n \rangle &= \langle T(G,\chi)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid T(G,\chi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\rangle \\
&= \langle T(G,\chi)^* T(G,\chi)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle \\
&= \langle T(G,\chi)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle \quad \text{بنابر قضایای ۱۰.۱.۱ و ۱.۱.۴} \\
&= \langle \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) P(\sigma)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle \\
&= \langle \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(n)} \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\rangle \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \langle u_{\sigma^{-1}(i)} \mid v_i\rangle \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \langle u_i \mid v_{\sigma(i)}\rangle \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} d_\chi^G(A). \qquad \square
\end{aligned}$$

$d_\chi^G(A)$ را که در لم بالا ظاهر شده است می‌توان تعمیمی از دترمینان A در نظر گرفت که در زیر آنرا به‌صورت کلی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۴ فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های در $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت

$$d_\chi^G(A) = \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

را تابع ماتریسی تعمیم یافته می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که $d_\epsilon^{\$_n}(A) = \det(A)$ که در آن ϵ سرشت متناوب گروه $\$_n$ است. همچنین $d_{1_{\$_n}}^{\$_n}(A)$ را با $\mathrm{per}(A)$ نمایش می‌دهند که در ترکیبیات نقش ویژه‌ای را بازی می‌کند.

اکنون در زیر قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم که در محاسبات بعدی نقش مهمی دارد. در این قضیه Γ_m^n و $O(\alpha)$ همان‌هایی هستند که به‌ترتیب در ۱.۱.۲ و ۲.۲.۳ تعریف شده‌اند.

قضیهٔ ۵.۱.۴ فرض کنیم $\{e_۱, \ldots, e_m\}$ پایه‌ای متعامد و یکّه برای V باشد و $\alpha, \beta \in \Gamma_m^n$. در این صورت

$$\langle e^*_\alpha \mid e^*_\beta \rangle = \begin{cases} \frac{\chi(۱)}{|G|} \sum\limits_{\sigma \in G_\beta} \chi(\sigma\tau^{-۱}) & : \text{اگر برای یک } \tau \in G\text{، } \alpha = \tau.\beta \\ ۰ & : \text{اگر } O(\alpha) \neq O(\beta) \end{cases}$$

برهان.

$$\begin{aligned} \langle e^*_\alpha | e^*_\beta \rangle &= \langle T(G,\chi)(e^\otimes_\alpha) | T(G,\chi)(e^\otimes_\beta) \rangle \\ &= \langle T(G,\chi)^* T(G,\chi)(e^\otimes_\alpha) | e^\otimes_\beta \rangle \\ &= \langle T(G,\chi)(e^\otimes_\alpha) | e^\otimes_\beta \rangle \quad \text{بنابر قضایای ۱۰.۱.۱ و ۱.۱.۴} \\ &= \langle \tfrac{\chi(۱)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) P(\sigma)(e_{\alpha_۱} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n}) | e_{\beta_۱} \otimes \cdots \otimes e_{\beta_n} \rangle \\ &= \langle \tfrac{\chi(۱)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) e_{\alpha_{\sigma^{-۱}(۱)}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{\sigma^{-۱}(n)}} | e_{\beta_۱} \otimes \cdots \otimes e_{\beta_n} \rangle \\ &= \tfrac{\chi(۱)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=۱}^{n} \langle e_{\alpha_{\sigma^{-۱}(i)}} | e_{\beta_i} \rangle. \end{aligned}$$

گیریم $O(\alpha) \neq O(\beta)$. لذا برای هر $\sigma \in G$، $\sigma.\alpha \neq \beta$. پس برای هر $\sigma \in G$، $۱ \leq i \leq n$ موجود است که $\alpha_{\sigma^{-۱}(i)} \neq \beta_i$ و چون $\{e_۱, \ldots, e_m\}$ پایهٔ متعامد و یکّه فرض شده است پس $\langle e_{\alpha_{\sigma^{-۱}(i)}} | e_{\beta_i} \rangle = ۰$. در نتیجه تمام جملات مجموع بالا صفر است، یعنی $\langle e^*_\alpha | e^*_\beta \rangle = ۰$.

اگر $\tau \in G$ موجود باشد که $\alpha = \tau.\beta$، آنگاه جملاتی از مجموع بالا غیرصفر هستند که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\alpha_{\sigma^{-۱}(i)} = \beta_i$ یا $\sigma.\alpha = \beta$ در نتیجه $\sigma.(\tau.\beta) = \beta$ یا $\sigma\tau.\beta = \beta$ و لذا $\sigma\tau \in G_\beta$. یعنی در این حالت به‌ازای $\sigma \in G$هایی با مجموعی غیر صفر روبرو هستیم که آن σ دارای خاصیت $\sigma\tau \in G_\beta$ باشد. امّا در این حالت با توجه به متعامد و یکّه بودن $\{e_۱, \ldots, e_m\}$، برای هر $۱ \leq i \leq n$ خواهیم داشت $\langle e_{\alpha_{\sigma^{-۱}(i)}} | e_{\beta_i} \rangle = ۱$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \langle e^*_\alpha | e^*_\beta \rangle &= \tfrac{\chi(۱)}{|G|} \sum_{\sigma\tau \in G_\beta} \chi(\sigma) \\ &= \tfrac{\chi(۱)}{|G|} \sum_{\sigma\tau \in G_\beta} \chi(\sigma\tau\tau^{-۱}) \\ &= \tfrac{\chi(۱)}{|G|} \sum_{\sigma \in G_\beta} \chi(\sigma\tau^{-۱}) \end{aligned}$$

و لذا حکم ثابت می‌شود. □

دو نتیجهٔ زیر نیز در محاسبات بعدی کارساز خواهند بود.

نتیجهٔ ۶.۱.۴ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایهٔ متعامد و یکّه برای V باشد، $\gamma \in \Gamma_m^n$ و $g, g' \in G$. در این صورت

$$\langle e^*_{g.\gamma} \mid e^*_{g'.\gamma} \rangle = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G_\gamma} \chi(g'\sigma g^{-1}).$$

برهان. قرار می‌دهیم $\alpha = g.\gamma$ و $\beta = g'.\gamma$ در این صورت $g^{-1}.\alpha = \gamma$ و $g'^{-1}.\beta = \gamma$ و لذا $g^{-1}.\alpha = g'^{-1}.\beta$. در نتیجه $\alpha = gg'^{-1}.\beta$. حال اگر بگیریم $\tau = gg'^{-1}$ بنابر قضیهٔ ۵.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle e^*_{g.\gamma} | e^*_{g'.\gamma} \rangle &= \langle e^*_\alpha | e^*_\beta \rangle \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G_\beta} \chi(\sigma \tau^{-1}) \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G_{g'.\gamma}} \chi(\sigma g' g^{-1}) \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in g' G_\gamma g'^{-1}} \chi(\sigma g' g^{-1}) \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g'^{-1}\sigma g' \in G_\gamma} \chi(g' g'^{-1} \sigma g' g^{-1}) \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G_\gamma} \chi(g' \sigma g^{-1}). \quad \square
\end{aligned}$$

نتیجهٔ ۷.۱.۴ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایهٔ متعامد و یکّه برای V باشد، $\gamma \in \Gamma_m^n$ و $g, g' \in G$. در این صورت

$$\langle e^*_{g.\gamma} \mid e^*_{g'.\gamma} \rangle = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in g' G_\gamma g^{-1}} \chi(\sigma).$$

برهان. بنابر نتیجهٔ ۶.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle e^*_{g.\gamma} | e^*_{g'.\gamma} \rangle &= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G_\gamma} \chi(g' \sigma g^{-1}) \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g'\sigma g^{-1} \in g' G_\gamma g^{-1}} \chi(g' \sigma g^{-1}) \\
&= \tfrac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in g' G_\gamma g^{-1}} \chi(\sigma). \quad \square
\end{aligned}$$

نتیجه‌ای که در زیر مطرح می‌کنیم نشان می‌دهد که ناتهی بودن Ω ایجاب می‌کند که کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ غیربدیهی گردد و این دلیل دیگری است بر صحت تذکر ۱۳.۲.۳. در اینجا Ω همان است که در ۱۰.۲.۳ تعریف شده است.

نتیجهٔ ۸.۱.۴ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایهٔ متعامد و یکّه برای V باشد. در این صورت برای $\alpha \in \Gamma_m^n$، $e^*_\alpha \neq o$ اگر و فقط اگر $\alpha \in \Omega$.

برهان.

$$\begin{aligned}
e^*_\alpha \neq o &\Leftrightarrow \|e^*_\alpha\|^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \langle e^*_\alpha | e^*_\alpha \rangle \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0 \quad \text{بنابر قضیهٔ ۵.۱.۴} \\
&\Leftrightarrow \sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha \in \Omega. \qquad \square
\end{aligned}$$

در زیر نتیجه‌ای مهم را مطرح می‌کنیم که در ادامهٔ کار، کارساز خواهد بود. در اینجا V^*_α همان است که در ۵.۲.۳ تعریف شده است.

نتیجهٔ ۹.۱.۴ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایه‌ای متعامد و یکّه برای V باشد. در این صورت مجموع مستقیم

$$V^n_\chi(G) = \bigoplus_{\alpha \in \overline{\Delta}} V^*_\alpha$$

مجموعی متعامد است.

برهان. گیریم $\alpha, \beta \in \overline{\Delta}$، $\alpha \neq \beta$، دلخواه باشند. باید نشان دهیم $V^*_\alpha \perp V^*_\beta$. امّا با توجه به اینکه $\alpha \neq \beta$، لذا $O(\alpha) \neq O(\beta)$ و در نتیجه $O(\sigma.\alpha) \neq O(\tau.\beta)$ که در آن $\sigma, \tau \in G$ دلخواه هستند. اکنون قضیهٔ ۵.۱.۴ نتیجه می‌دهد که $\langle e^*_{\sigma.\alpha} | e^*_{\tau.\beta} \rangle = 0$ و این نشان می‌دهد $V^*_\alpha \perp V^*_\beta$ که حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

۴-۲ پایه‌های متعامد در کلاس تقارن تانسوری

در این بخش پایه‌های متعامد خاصی معروف به Oـپایه را برای کلاس تقارن تانسوری $V^n_\chi(G)$ تعریف می‌کنیم. اینکه به‌ازای چه Gها و χهایی، $V^n_\chi(G)$ دارای Oـپایه است و یا دارای Oـپایه نیست مسأله‌ای حل نشده است. در مقالات [5]، [7]، [15]، [23] و [24] در مورد Oـپایه بحث شده است. بحث مبسوطی در مورد این موضوع نیز در [17] ظاهر شده است. در این بخش نیز فرض می‌کنیم G زیرگروهی از $\$_n$ است و χ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G، همچنین V را یک فضای یکانی m بعدی در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۲.۴ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایهٔ متعامد و یکّه برای V باشد و W زیرفضایی از $V^n_\chi(G)$. اگر $S \subseteq \Gamma^n_m$ موجود باشد طوری که $O = \{e^*_\alpha | \alpha \in S\}$ به پایه‌ای متعامد برای W تبدیل گردد، آنگاه می‌گوییم W دارای

Oـپایه است.

تذکر ۲.۲.۴ توجه می‌کنیم که بنابر نتیجهٔ ۹.۱.۴، $V_\chi^n(G)$ دارای Oـپایه است اگر و فقط اگر برای هر $\alpha \in \overline{\Delta}$، زیرفضای مداری V_α^* دارای Oـپایه باشد.

لم ۳.۲.۴ اگر χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر خطی از G باشد آنگاه $V_\chi^n(G)$ دارای Oـپایه است.

برهان. چون $\chi(۱) = ۱$، لذا بنابر نتیجهٔ ۱۲.۲.۳ برای هر $\alpha \in \overline{\Delta}$ به‌دست می‌آوریم $\dim V_\alpha^* = ۱$ و لذا برای هر $\alpha \in \overline{\Delta}$، V_α^* دارای Oـپایه است که بنابر تذکر قبل وجود Oـپایه را برای $V_\chi^n(G)$ نشان می‌دهد. □

تذکر ۴.۲.۴ بنابر لم بالا در می‌یابیم که در بررسی وجود یا عدم وجود Oـپایه برای $V_\chi^n(G)$ می‌توانیم فرض کنیم χ غیرخطی است. همچنین بنابر تذکر ۱.۱.۳ فرض می‌کنیم $\dim V = m \geq ۲$ و $n \geq ۲$.

اکنون گروه G را که با نمایش کیلی زیرگروهی از S_n می‌باشد در نظر می‌گیریم و یک شرط لازم برای وجود Oـپایه برای کلاس تقارن تانسوری وابسته به آن پیدا می‌کنیم. این شرط لازم در بخشی از [7] ظاهر شده است.

قضیهٔ ۵.۲.۴ فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی از مرتبهٔ n باشد که با نمایش کیلی زیرگروهی از S_n است. اگر V فضای یکانی از بعد m، $m \geq ۲$، باشد و $\chi \in I(G)$ طوری باشد که $\chi(۱)^۲ > |G|/۲$، آنگاه $V_\chi^n(G)$ دارای Oـپایه نمی‌باشد.

برهان. فرض کنیم $\{e_۱, \ldots, e_m\}$ پایهٔ متعامد و یکّه برای V باشد. گیریم $V_\chi^n(G)$ دارای Oـپایه باشد، در این صورت بنابر تذکر ۲.۲.۴ برای هر $\alpha \in \overline{\Delta}$، V_α^* دارای Oـپایه است. قرار می‌دهیم $\alpha = (۱, ۲, \ldots, ۲) \in \Gamma_m^n$ و با توجه به اینکه $G_\alpha = \{۱\}$، نتیجه می‌گیریم $\sum_{g \in G_\alpha} \chi(g) = \chi(۱) \neq ۰$ و لذا می‌توانیم فرض کنیم $\alpha \in \overline{\Delta}$. بنابر آنچه در بالا اشاره کردیم V_α^* برای $\alpha = (۱, ۲, \ldots, ۲)$ دارای Oـپایه است. چون بنا بر قضیهٔ ۹.۲.۳،

$$\dim V_\alpha^* = \frac{\chi(۱)}{|G_\alpha|} \sum_{g \in G_\alpha} \chi(g) = \chi(۱)^۲ = s$$

لذا می‌توانیم فرض کنیم $\{e_{g_۱ \cdot \alpha}^*, e_{g_۲ \cdot \alpha}^*, \ldots, e_{g_s \cdot \alpha}^*\}$ همان Oـپایه برای V_α^* است. اکنون ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ را به‌صورت

$$a_{ij} = \frac{\chi(۱)}{n} \chi(g_i g_j^{-۱})$$

تعریف می‌کنیم که در آن $G = \{g_۱, \ldots, g_n\}$. برای $۱ \leq i, j \leq s$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\chi(۱)}{n}\chi(g_i g_j^{-۱}) \\ &= \frac{\chi(۱)}{|G|}\sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(g_i \sigma g_j^{-۱}) \\ &= \langle e^*_{g_j.\alpha} \mid e^*_{g_i.\alpha} \rangle \qquad \text{بنابر نتیجهٔ ۶.۱.۴} \\ &= \begin{cases} ۰ & : i \neq j \text{ اگر} \\ \frac{\chi(۱)}{n}\chi(۱) & : i = j \text{ اگر} \end{cases} \\ &= \begin{cases} ۰ & : i \neq j \text{ اگر} \\ \frac{s}{n} & : i = j \text{ اگر} \end{cases} \end{aligned}$$

و لذا ماتریس A دارای فرم زیر خواهد شد:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{s}{n}I_s & A_۱ \\ A_۲ & A_۳ \end{bmatrix}$$

که در آن $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ به‌ترتیب ماتریس‌های $s \times (n-s)$، $(n-s) \times s$ و $(n-s) \times (n-s)$ هستند و I_s ماتریس همانی $s \times s$ را نمایش می‌دهد. اگر فرض کنیم $A^۲ = [b_{ij}]$ در این صورت بنابر قضیهٔ ۲۸.۱.۰ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}a_{kj} \\ &= \frac{\chi(۱)^۲}{n^۲}\sum_{k=۱}^{n}\chi(g_i g_k^{-۱})\chi(g_k g_j^{-۱}) \\ &= \frac{\chi(۱)^۲}{n^۲}\sum_{g \in G}\chi(g)\chi(g^{-۱}g_i g_j^{-۱}) \\ &= \frac{\chi(۱)^۲}{n^۲}\frac{n}{\chi(۱)}\chi(g_i g_j^{-۱}) \\ &= \frac{\chi(۱)}{n}\chi(g_i g_j^{-۱}) \\ &= a_{ij}, \end{aligned}$$

و لذا $A^۲ = A$. اگر این شرط را بر شکل بلوکی A اعمال کنیم به‌دست می‌آوریم $A_۱A_۲ = (\frac{s}{n} - \frac{s^۲}{n^۲})I_s$. از آنجا که $s \neq n$، لذا $A_۱A_۲$ وارونپذیر است و لذا به‌دست می‌آوریم $s \leq n - s$ یا $s \leq \frac{n}{۲}$ یا $\chi(۱)^۲ \leq |G|/۲$ که تناقض است. پس $V^n_\chi(G)$ نمی‌تواند دارای Oـپایه باشد. $\square$

تذکر ۶.۲.۴ در [21] شرط لازم قضیهٔ قبل تعمیم داده شده است، همچنین در [20] ثابت شده است که این شرط لازم بهینه است.

۴-۳ پایه‌های متعامد در کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه دو دوری

در این بخش می‌خواهیم شرط لازم و کافی برای وجود Oـپایه را برای کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه دو دوری پیدا کنیم. در سراسر این بخش V را یک فضای یکانی m بعدی در نظر می‌گیریم و $\{e_{۱}, \ldots, e_m\}$ را یک پایهٔ متعامد و یکّه از V. این مطالب قسمت اصلی [5] را تشکیل داده‌اند.

فرض کنیم $G = T_{۴n}$ گروه دو دوری از مرتبهٔ $۴n$ باشد که در ۲ـ۳ آنرا معرفی کردیم. یادآوری می‌کنیم که این گروه توسط نمایش کیلی زیرگروهی از $\$_{۴n}$ می‌باشد و لذا کلاس تقارن تانسوری $V_{\chi}^{۴n}(G)$ برای هر $\chi \in I(G)$ معنی دارد. همچنین این گروه دارای چهار سرشت تحویل‌ناپذیر خطی ψ_i، $۱ \leq i \leq ۴$، وقتی n فرد است و ϕ_i، $۱ \leq i \leq ۴$، وقتی n زوج است می‌باشد و $n - ۱$ سرشت غیرخطی دارد که آنها را با χ_h، $۱ \leq h \leq n - ۱$، نشان می‌دهیم:

$$\chi_h(r^k) = ۲\cos\frac{kh\pi}{n},\ \chi_h(r^k s) = ۰,\ ۰ \leq k < ۲n.$$

اگر $n = ۱$، آنگاه گروه دو دوری $G = T_{۴}$ به گروه دوری ۴ عضوی تبدیل می‌شود، $T_{۴} \simeq \mathbb{Z}_{۴}$، و لذا آبلی بودن G در این حالت نشان می‌دهد که تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر G خطی هستند و لذا بنابر لم ۳.۲.۴، $V_{\chi}^{۴}(G)$ برای هر $\chi \in I(G)$ دارای Oـپایه خواهد بود. در نتیجه می‌توانیم فرض کنیم که $n \geq ۲$. از طرفی چون ψ_i و ϕ_i، $۱ \leq i \leq ۴$، نیز خطی هستند پس $V_{\psi_i}^{۴n}(G)$ و $V_{\phi_i}^{۴n}(G)$ نیز دارای Oـپایه هستند. از طرفی بنابر تذکر ۱.۱.۳ نیز می‌توانیم فرض کنیم $\dim V = m \geq ۲$.

در نتیجه، در ادامه همواره فرض می‌کنیم $n \geq ۲$ و $m \geq ۲$ و می‌خواهیم شرط لازم و کافی برای وجود Oـپایه را برای $V_{\chi_h}^{۴n}(G)$، $۱ \leq h \leq n - ۱$، پیدا کنیم.

لم ۱.۳.۴ فرض کنیم H زیرگروهی از $G = T_{۴n}$ باشد. در این صورت عدد طبیعی k، $۰ \leq k < ۲n$، وجود دارد که $H = \langle r^k \rangle$ یا $\langle r^k \rangle \lneqq H$ و $H \cap \langle r \rangle = \langle r^k \rangle$. بالاخص در حالت دوم $|H| \geq ۲|\langle r^k \rangle|$.

برهان. بنابر تعریف گروه $G = T_{۴n}$، در می‌یابیم که اعضای G به شکل r^l و یا $r^l s$ هستند که $۰ \leq l < ۲n$. اگر H زیرگروهی از G باشد آنگاه $H \cap \langle r \rangle$ یک زیرگروه دوری از $\langle r \rangle$ است و لذا عدد طبیعی k، $۰ \leq k < ۲n$ ، موجود است که $H \cap \langle r \rangle = \langle r^k \rangle$. پس یا $H = \langle r^k \rangle$ و یا $H \neq \langle r^k \rangle$ که در حالت اخیر چون $\langle r^k \rangle = H \cap \langle r \rangle \leq H$، لذا $\langle r^k \rangle \lneqq H$ و $H \cap \langle r \rangle = \langle r^k \rangle$. همچنین در این حالت بنابر قضیهٔ لاگرانژ ازنظریهٔ مقدماتی گروه‌ها $|\langle r^k \rangle| \mid |H|$ و لذا از $|\langle r^k \rangle| \lneqq |H|$ نتیجه می‌گیریم که $|H| \geq ۲|\langle r^k \rangle|$. $\square$

لم ۲.۳.۴ فرض کنیم $n \geq 2$، $1 \leq h \leq n-1$ و $0 \leq k < 2n$. اگر $l = \frac{2n}{(2n,k)}$ که $(2n,k)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک $2n$ و k است، آنگاه

$$\sum_{t=1}^{l} \cos \frac{tkh\pi}{n} = \begin{cases} l & : kh \overset{2n}{\equiv} 0 \text{ اگر} \\ 0 & : kh \overset{2n}{\not\equiv} 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

برهان. اثبات بنابر مثلثات مقدماتی سرراست است. □

لم ۳.۳.۴ فرض کنیم $G = T_{4n}$، $n \geq 2$ و $\chi = \chi_h$، $1 \leq h \leq n-1$. گیریم H زیرگروهی از G باشد، یعنی $H = \langle r^k \rangle$ یا $H \gneqq \langle r^k \rangle$ و $H \cap \langle r \rangle = \langle r^k \rangle$ برای یک k، $0 \leq k < 2n$. اگر $l = \frac{2n}{(2n,k)}$ که در آن $(2n,k)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک $2n$ و k است آنگاه

$$\sum_{g \in H} \chi(g) = \begin{cases} 2l & : kh \overset{2n}{\equiv} 0 \text{ اگر} \\ 0 & : kh \overset{2n}{\not\equiv} 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

برهان. می‌دانیم $o(r^k) = \frac{2n}{(2n,k)} = l$ و لذا $H = \{r^k, r^{2k}, \ldots, r^{lk}\}$ یا $H \gneqq \{r^k, r^{2k}, \ldots, r^{lk}\}$ و $H \cap \langle r \rangle = \{r^k, r^{2k}, \ldots, r^{lk}\}$. ولی χ خارج $\langle r \rangle$ صفر است و لذا بنابر لم ۲.۳.۴ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{g \in H} \chi(g) &= \sum_{t=1}^{l} \chi(r^{tk}) \\ &= 2\sum_{t=1}^{l} \cos \frac{tkh\pi}{n} \\ &= \begin{cases} 2l & : kh \overset{2n}{\equiv} 0 \text{ اگر} \\ 0 & : kh \overset{2n}{\not\equiv} 0 \text{ اگر} \end{cases} \end{aligned}$$ □

لم ۴.۳.۴ فرض کنیم $G = T_{4n}$، $n \geq 2$ و $\chi = \chi_h$، $1 \leq h \leq n-1$. اگر $\alpha \in \overline{\Delta}$ آنگاه $G_\alpha = \langle r^k \rangle$ یا $G_\alpha \gneqq \langle r^k \rangle$ و $G_\alpha \cap \langle r \rangle = \langle r^k \rangle$ برای یک k، $0 \leq k < 2n$، $kh \overset{2n}{\equiv} 0$. بالاخص اگر $G_\alpha \gneqq \langle r^k \rangle$ آنگاه $|G_\alpha| \geq 2|\langle r^k \rangle|$.

برهان. G_α زیرگروهی از G است و لذا بنابر لم ۱.۳.۴، $G_\alpha = \langle r^k \rangle$ یا $G_\alpha \gneqq \langle r^k \rangle$ و $G_\alpha \cap \langle r \rangle = \langle r^k \rangle$ برای یک k، $0 \leq k < 2n$. بالاخص اگر $G_\alpha \gneqq \langle r^k \rangle$ آنگاه $|G_\alpha| \geq 2|\langle r^k \rangle|$. امّا بنابر لم ۳.۳.۴ اگر $kh \overset{2n}{\not\equiv} 0$، آنگاه $\sum_{g \in G_\alpha} \chi(g) = 0$ و لذا $\alpha \notin \overline{\Delta}$. این تناقض نشان می‌دهد که $kh \overset{2n}{\equiv} 0$. □

اکنون تعریفی را می‌آوریم که می‌توان خواص و تعمیم‌های آنرا در [19] دید. این تعریف در ادامهٔ این بخش فقط نقش یک نمادگذاری مناسب را بازی می‌کند.

تعریف ۵.۳.۴ فرض کنیم $h \geq \circ$ و $n > \circ$ دو عدد طبیعی باشند. a و b را به‌ترتیب بزرگترین توانی از ۲ در نظر می‌گیریم که در تجزیهٔ h و n به عوامل اوّل ظاهر می‌شوند. در این صورت ارزیابی ۲ـآدیک $\frac{h}{n}$ را $a-b$ تعریف می‌کنیم و آنرا با $\nu_{۲}(\frac{h}{n})$ نمایش می‌دهیم.

لم ۶.۳.۴ فرض کنیم $n \geq ۲$ و $۱ \leq h \leq n-۱$. در این صورت t و t'، $\circ \leq t, t' < ۲n$، موجودند که $\cos\frac{(t-t')h\pi}{n} = \circ$ اگر و فقط اگر $\nu_{۲}(\frac{h}{n}) < \circ$.

برهان. اثبات بنابر مثلثات مقدماتی سر راست است. □

لم ۷.۳.۴ فرض کنیم $G = T_{۲n}$، $n \geq ۲$ و $\chi = \chi_h$، $۱ \leq h \leq n-۱$. اگر $\alpha \in \overline{\Delta}$ طوری باشد که $G_\alpha = \langle r^k \rangle$، $\circ \leq k < ۲n$، $kh \overset{۲n}{\equiv} \circ$، آنگاه $\nu_{۲}(\frac{h}{n}) < \circ$ نتیجه می‌دهد که زیرفضای مداری V^*_α دارای Oـپایه است.

برهان. می‌دانیم که $G_\alpha = \{r^k, r^{۲k}, \ldots, r^{lk}\}$ و لذا $o(r^k) = \frac{۲n}{(۲n,k)} = l$. در نتیجه بنابر قضیهٔ ۹.۲.۳ و لم ۳.۳.۴

$$\dim V^*_\alpha = \frac{\chi(۱)}{|G_\alpha|} \sum_{g \in G_\alpha} \chi(g) = \frac{۲}{l}(۲l) = ۴.$$

اکنون برای هر $g, g' \in G$ داریم:

$$g' G_\alpha g^{-۱} = \begin{cases} \{r^{k+b-a}, r^{۲k+b-a}, \ldots, r^{lk+b-a}\} & : g' = r^b \text{ و } g = r^a \text{ اگر} \\ \{r^{k+n+a+b}s, r^{۲k+n+a+b}s, \ldots, r^{lk+n+a+b}s\} & : g' = r^b \text{ و } g = r^a s \text{ اگر} \\ \{r^{-k+b-a}, r^{-۲k+b-a}, \ldots, r^{-lk+b-a}\} & : g' = r^b s \text{ و } g = r^a s \text{ اگر} \end{cases}$$

برای $g = r^a$ و $g' = r^b$، بنابر نتیجهٔ ۷.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned}\langle e^*_{g.\alpha}|e^*_{g'.\alpha}\rangle &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in g'G_\alpha g^{-1}}\chi(\sigma)\\ &= \frac{2}{4n}\sum_{t=1}^{l}\chi(r^{tk+b-a})\\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{l}\cos\frac{(tk+b-a)h\pi}{n}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{l}\cos\left(\frac{tkh\pi}{n}+\frac{(b-a)h\pi}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{l}\cos\frac{(b-a)h\pi}{n}\\ &= \frac{l}{n}\cos\frac{(b-a)h\pi}{n}.\end{aligned}$$

اگر $g = r^a s$ و $g' = r^b$ یا $g = r^a s$ و $g' = r^b s$، آنگاه محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که به‌ترتیب $\langle e^*_{g.\alpha}|e^*_{g'.\alpha}\rangle = 0$ یا $\langle e^*_{g.\alpha}|e^*_{g'.\alpha}\rangle = \frac{l}{n}\cos\frac{(b-a)h\pi}{n}$. لذا

$$\langle e^*_{g.\alpha}|e^*_{g'.\alpha}\rangle = \begin{cases}\frac{l}{n}\cos\frac{(b-a)h\pi}{n} & :\ g' = r^b \text{ و } g = r^a \text{ اگر}\\ 0 & :\ g' = r^b \text{ و } g = r^a s \text{ اگر}\\ \frac{l}{n}\cos\frac{(b-a)h\pi}{n} & :\ g' = r^b s \text{ و } g = r^a s \text{ اگر}\end{cases}$$

امّا توجه می‌کنیم که $\nu_2(\frac{h}{n}) < 0$ بنابر لم ۶.۳.۴ نتیجه می‌دهد که t و t'، $0 \le t, t' < 2n$، موجودند که $\cos\frac{(t-t')h\pi}{n} = 0$ و لذا اگر قرار دهیم $S = \{r^t.\alpha, r^{t'}.\alpha, r^t s.\alpha, r^{t'}s.\alpha\} \subset \Gamma^{4n}_m$ بنابر محاسبهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که برای هر $\beta, \beta' \in S$، $\beta \neq \beta'$، $\langle e^*_\beta|e^*_{\beta'}\rangle = 0$. در نتیجه چون $\dim V^*_\alpha = 4$ پس $\{e^*_\beta|\beta \in S\}$ یک Oـپایه برای V^*_α است. □

لم ۸.۳.۴ فرض کنیم $G = T_{4n}$، $n \ge 2$ و $\chi = \chi_h$، $1 \le h \le n-1$. اگر $\alpha \in \overline{\Delta}$ طوری باشد که $\langle r^k\rangle \lneqq G_\alpha$ و $G_\alpha \cap \langle r\rangle = \langle r^k\rangle$، $0 \le k < 2n$، $kh \overset{2n}{\equiv} 0$، آنگاه $\nu_2(\frac{h}{n}) < 0$ نتیجه می‌دهد که زیرفضای مداری V^*_α دارای Oـپایه است.

برهان. می‌دانیم که $o(r^k) = \frac{2n}{(2n,k)} = l$ و لذا $\{r^k, r^{2k}, \ldots, r^{lk}\} \lneqq G_\alpha$ و $G_\alpha \cap \langle r\rangle = \{r^k, r^{2k}, \ldots, r^{lk}\}$. توجه می‌کنیم که بنابر لم ۴.۳.۴، $|G_\alpha| \ge 2l$ و لذا بنابر قضیهٔ ۹.۲.۳ و لم ۳.۳.۴

$$\dim V^*_\alpha = \frac{\chi(1)}{|G_\alpha|}\sum_{g\in G_\alpha}\chi(g) \le \frac{2}{2l}(2l) = 2.$$

در نتیجه $\dim V_\alpha^* = 1$ یا $\dim V_\alpha^* = 2$. اگر $\dim V_\alpha^* = 1$، به‌وضوح، V_α^* دارای Oـپایه خواهد بود و حکم ثابت است. پس فرض می‌کنیم $\dim V_\alpha^* = 2$. در این حالت برای $g = r^a$ و $g' = r^b$ داریم

$$\{r^{k+b-a}, r^{2k+b-a}, \dots, r^{lk+b-a}\} \subsetneqq g'G_\alpha g^{-1}$$

و

$$g'G_\alpha g^{-1} \cap \langle r\rangle = \{r^{k+b-a}, r^{2k+b-a}, \dots, r^{lk+b-a}\}.$$

لذا نتیجهٔ ۷.۱.۴ به‌دست می‌دهد

$$\begin{aligned}
\langle e^*_{g.\alpha}|e^*_{g'.\alpha}\rangle &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in g'G_\alpha g^{-1}}\chi(\sigma)\\
&= \frac{2}{4n}\sum_{t=1}^{l}\chi(r^{tk+b-a})\\
&= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{l}\cos\frac{(tk+b-a)h\pi}{n}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{l}\cos\left(\frac{tkh\pi}{n}+\frac{(b-a)h\pi}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{l}\cos\frac{(b-a)h\pi}{n}\\
&= \tfrac{l}{n}\cos\tfrac{(b-a)h\pi}{n}.
\end{aligned}$$

از آنجایی که بنابر فرض $\nu_2(\frac{h}{n}) < 0$، لذا بنابر لم ۶.۳.۴، t و t'، $0 \le t, t' < 2n$، موجودند که $\cos\frac{(t-t')h\pi}{n} = 0$ و لذا بنابر محاسبهٔ بالا $\langle e^*_{r^t.\alpha}|e^*_{r^{t'}.\alpha}\rangle = 0$. در نتیجه چون $\dim V_\alpha^* = 2$، پس $\{e^*_\beta|\beta\in S\}$ یک Oـپایه برای V_α^* است که در آن $S = \{r^t.\alpha, r^{t'}.\alpha\} \subset \Gamma_m^{4n}$. □

قضیهٔ ۹.۳.۴ فرض کنیم $G = T_{4n}$، $n \ge 2$ و $\chi = \chi_h$، $1 \le h \le n-1$ و $\dim V = m \ge 2$. در این صورت $V_\chi^{4n}(G)$ دارای Oـپایه است اگر و فقط اگر $\nu_2(\frac{h}{n}) < 0$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $V_\chi^{4n}(G)$ دارای Oـپایه باشد. در این صورت بنابر تذکر ۲.۲.۴ برای هر $\alpha \in \overline{\Delta}$ زیرفضای مداری V_α^* دارای Oـپایه است. بالاخص برای $\alpha = (1, 2, \dots, 2)$ چون $G_\alpha = \{1\}$ و لذا $\sum_{g\in G_\alpha}\chi(g) = 2 \neq 0$، خواهیم داشت $\alpha \in \overline{\Delta}$ و لذا V_α^* دارای Oـپایه خواهد بود. اکنون برای هر $g, g' \in G$ داریم

$$g'G_\alpha g^{-1} = \begin{cases}
\{r^{b-a}\} & : g' = r^b \ \text{و}\ g = r^a \ \text{اگر}\\
\{r^{n+a+b}s\} & : g' = r^b \ \text{و}\ g = r^a s \ \text{اگر}\\
\{r^{b-a}\} & : g' = r^b s \ \text{و}\ g = r^a s \ \text{اگر}
\end{cases}$$

و لذا بنابر نتیجهٔ ۷.۱.۴ داریم

$$\langle e^*_{g.\alpha} | e^*_{g'.\alpha} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{n}\cos\frac{(b-a)h\pi}{n} & : g' = r^b \text{ و } g = r^a \text{ اگر } \\ 0 & : g' = r^b \text{ و } g = r^a s \text{ اگر } \\ \frac{1}{n}\cos\frac{(b-a)h\pi}{n} & : g' = r^b s \text{ و } g = r^a s \text{ اگر } \end{cases}$$

امّا بنابر قضیهٔ ۹.۲.۳

$$\dim V^*_\alpha = \frac{\chi(1)}{|G_\alpha|}\sum_{g\in G_\alpha}\chi(g) = \frac{2}{1}(2) = 4.$$

بنابر محاسبهٔ بالا و با توجه به‌اینکه ۴ تانسور تجزیه‌پذیر متقارن موجودند که دوبدو بر هم عمود می‌باشند لذا لزوماً t و t'، $0 \leq t, t' < 2n$، موجود خواهند بود که $\cos\frac{(t-t')h\pi}{n} = 0$. در نتیجه بنابر لم ۶.۳.۴ به‌دست می‌آوریم $\nu_2(\frac{h}{n}) < 0$.

برعکس اگر فرض کنیم $\nu_2(\frac{h}{n}) < 0$ آنگاه بنابر لم‌های ۴.۳.۴، ۷.۳.۴ و ۸.۳.۴ برای هر $\alpha \in \overline{\Delta}$، V^*_α و در نتیجه $V^{4n}_\chi(G)$ دارای Oـپایه است. $\square$

نتیجهٔ ۱۰.۳.۴ فرض کنیم $G = T_{4n}$، $n \geq 2$ فرد و $\chi = \chi_h$، $1 \leq h \leq n-1$ و $2 \leq \dim V = m$. در این صورت $V^{4n}_\chi(G)$ فاقد Oـپایه است.

برهان. چون n فرد است پس $\nu_2(\frac{h}{n}) \geq 0$ و لذا بنابر قضیهٔ ۹.۳.۴ حکم واضح است. $\square$

تعریف ۱۱.۳.۴ گروه دو دوری از درجهٔ 2^{n-1} را گروه کواترنیون تعمیم‌یافته می‌نامند و آنرا با $Q_{2^{n+1}}$ نمایش می‌دهند.

تذکر ۱۲.۳.۴ بنابر تعریف بالا $Q_{2^{n+1}} = T_{4(2^{n-1})} = T_{2^{n+1}}$ و لذا $Q_{2^{n+1}}$ گروهی از مرتبهٔ 2^{n+1} است. وقتی $n = 2$، آنگاه Q_8 همان گروه کواترنیون معمولی می‌باشد.

نتیجهٔ ۱۳.۳.۴ فرض کنیم $G = Q_{2^{n+1}}$، $n \geq 2$ و $\chi = \chi_h$، $1 \leq h \leq 2^{n-1}-1$ و $2 \leq \dim V = m$. در این صورت $V^{2^{n+1}}_\chi(G)$ دارای Oـپایه است.

برهان. چون $G = Q_{2^{n+1}} = T_{4(2^{n-1})}$ و از آنجایی که $1 \leq h \leq 2^{n-1}-1$ نتیجه می‌گیریم که $\nu_2(\frac{h}{2^{n-1}}) < 0$ و لذا قضیهٔ ۹.۳.۴ حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

تذکر ۱۴.۳.۴ توجه می‌کنیم که لم ۳.۲.۴ حاکی از آن است که کلاس‌های تقارن تانسوری وابسته به سرشتهای خطی یک گروه دارای Oـپایه است. در سال ۱۹۸۶ در [15] ثابت شد که عکس این مطلب نیز درست است، یعنی اگر کلاس تقارن تانسوری $V_\chi^n(G)$ دارای Oـپایه باشد لزوماً χ خطی است. امّا در سال ۱۹۹۱ در [24] مثال نقضی برای این موضوع ارائه شد و درستی عکس لم ۳.۲.۴ فرو ریخت. توجه می‌کنیم که قضیهٔ ۹.۳.۴ دستهٔ زیادی از مثالهای نقض را برای این موضوع ارائه می‌دهد.

مراجع

[1] T. M. Apostol, "*Introduction to Analytic Number Theory*", Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, "*Generators and Relations for Discrete Groups*", Third edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[3] L. J. Cummings, *Cyclic Symmetry Classes*, J. Algebra **40** (1976), 401-405.

[4] M. R. Darafsheh, M. R. Pournaki, *On the Dimensions of Cyclic Symmetry Classes of Tensors*, J. Algebra **205** (1998), no. 1, 317-325.

[5] M. R. Darafsheh, M. R. Pournaki, *On the Orthogonal Basis of the Symmetry Classes of Tensors Associated with the Dicyclic Group*, Linear and Multilinear Algebra **47** (2000), no. 2, 137-149.

[6] M. R. Darafsheh, M. R. Pournaki, *Computation of the Dimensions of Symmetry Classes of Tensors Associated with the Finite two Dimensional Projective Special Linear Group*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **10** (2000), no. 3, 237-250.

[7] M. R. Darafsheh, M. R. Pournaki, *Non-Vanishing and Orthogonal Basis of Symmetry Classes of Tensors*, To Appear in Southeast Asian Bull. Math.

[8] L. Dornhoff, "*Group Representation Theory*", Part I, Marcel Dekker, Inc., 1972.

[9] R. Freese, *Inequalities for Generalized Matrix Functions Based on Arbitrary Characters*, Linear Algebra Appl. **7** (1973), 337-345.

[10] R. R. Holmes, T. Y. Tam, *Symmetry Classes of Tensors Associated with Certain Groups*, Linear and Multilinear Algebra **32** (1992), 21-31.

[11] I. M. Isaacs, *"Character Theory of Finite Groups"*, Academic Press, New York, 1976.

[12] G. James, M. Liebeck, "*Representations and Characters of Groups*", Cambridge University Press, 1993.

[13] M. Marcus, *"Finite Dimensional Multilinear Algebra"*, Part 1, Marcel Dekker, New York, 1973.

[14] M. Marcus, *"Finite Dimensional Multilinear Algebra"*, Part 2, Marcel Dekker, New York, 1975.

[15] M. Marcus, J. Chollet, *Construction of Orthonormal Bases in Higher Symmetry Classes of Tensors*, Linear and Multilinear Algebra **19** (1986), 133-140.

[16] R. Merris, *The Dimension of Certain Symmetry Classes of Tensors II,* Linear and Multilinear Algebra **4** (1976), 205-207.

[17] R. Merris, *"Multilinear Algebra"*, Gordon and Breach Science Publishers, 1997.

[18] R. Merris, M. A. Rashid, *The Dimension of Certain Symmetry Classes of Tensors*, Linear and Multilinear Algebra **2** (1974), 245-248.

[19] J. P. Serre, "*A Course in Arithmetic*", First edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[20] M. A. Shahabi, K. Azizi, M. H. Jafari, *On the Orthogonal Basis of Symmetry Classes*, To Appear in J. Algebra.

[21] M. Shahryari, *On the Orthogonal Bases of Symmetry Classes*, J. Algebra **220** (1999), 327-332.

[22] T. Y. Tam, *On the Cyclic Symmetry Classes*, J. Algebra **182** (1996), 557-560.

[23] B. Y. Wang, M. P. Gong, *The Subspace and Orthonormal Bases of Symmetry Classes of Tensors*, Linear and Multilinear Algebra **30** (1991), 195-204.

[24] B. Y. Wang, M. P. Gong, *A Higher Symmetry Classes of Tensors with an Orthogonal Basis of Decomposable Symmetrized Tensors*, Linear and Multilinear Algbera **30** (1991), 61-64.

فهرست راهنما